$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}\det A_{1n}$$

$\underline{n=2}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\det(a_{22}) - a_{12}\det(a_{21})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$\underline{n=3}$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - \cdots$$

Formule pour déterminant 3x3

$$\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

- jaune +
- orange −

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$\mathbb{R}_2[X] = \{$ polynômes en X à coeff. dans $\mathbb{R}$ et de degré $\leq 2\}$

• Théorème : $\mathbb{R}[X]$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dim. infinie)

$\mathbb{R}_n[X] = \{$ poly. degré $\leq n\}$ sev de dim. $n+1$

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \qquad \underbrace{a_0, \dots, a_n}_{n+1} \in \mathbb{R}$$

canonique

Base de $\mathbb{R}_n[X]$: $(1, X, X^2, \dots, X^n)$

Question : Est-ce que la famille $(\underbrace{1+X}_{u_1}, \underbrace{2+X^2}_{u_2}, \underbrace{X-X^2}_{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

On écrit u_1, u_2, u_3 sur la base $(\underset{e_1}{1}, \underset{e_2}{X}, \underset{e_3}{X^2})$:

$u_1 = e_1 + e_2$ donc $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{matrix}$

$u_2 = 2e_1 + e_3$ donc $U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_3 = e_2 - e_3$ donc $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$a_2 X^2 + a_1 X + a_0$
$\|$
$a(1+X) + b(2+X^2) + c(X-X^2)$

La famille (u_1, u_2, u_3) est libre ssi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

On calcule que ce déterminant vaut 1

donc c'est une base.

Calcul de cofacteur

$A = (a_{ij})$

$$A = \begin{array}{c} \text{3}^{\text{e}}\text{ colonne} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & \boxed{5} \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow 2^{\text{e}} \text{ ligne}$$

$$\text{cofacteur}(a_{23}) = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(1 \times (-1) - 0 \times 0) = 1$$

$$\text{cofacteur}(a_{31}) = + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (0 \times 5 - 3 \times 2) = -6$$

Calculs de déterminant

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = 5\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+12\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$= -0\times\begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (5\times5 - 3\times7) = 25-21 = 4$$

$$= -7\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -7(0\times4-(-1)\times3) - 5(5\times(-1)-12\times0)$$

$$= -7\times3 - 5\times(-5) = -21+25 = 4$$