Proposition 1.25. *Soient A, B et C trois matrices dans $M_n(\mathbb{K})$ et soient $M \in M_{2n}(\mathbb{K})$ telles que*

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right).$$

Alors, on a $\det(M) = \det(A)\det(C)$.

1.3.6 Déterminant d'un endomorphisme

A matrice carrée

$\det(A) \in K$

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit A la matrice de φ respectivement à la base $\mathcal{B}$. On définit le **déterminant** de φ par $\det(\varphi) = \det(A)$.

Proposition 1.26. *Le déterminant de φ ne dépend pas du choix de base $\mathcal{B}$. De plus, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $\det(\varphi) \neq 0$,
2. *φ est injective,*
3. *φ est surjective,*
4. *φ est bijective,*
5. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$, ← φ injective
6. $\mathrm{Im}(\varphi) = E$,

$\varphi : E \to E$ application linéaire

$\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$

φ surjective

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}}$$

$\mathrm{rang}(\varphi) = \dim \mathrm{Im}(\varphi)$

7. $\mathrm{rang}(\varphi) = \dim(E)$.

Démonstration. On montre le premier point. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E et soit A' a matrice de φ respectivement à la base $\mathcal{B}'$. Alors, on a $A' = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Il suit

$$\det(A') = \det(P^{-1}AP) = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

$\det(P)^{-1}\det(P) = 1$

et donc $\det(\varphi)$ ne dépend pas du choix de la base.

On montre les équivalences. On sait déjà que $2 \iff 5$ et $3 \iff 6$. On a aussi directement $6 \iff 7$ par la définition du rang. Par le théorème du rang, on a $\mathrm{rang}(\varphi) = \dim(E)$ si et seulement si $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ et donc $7 \iff 5$. On a donc $2 \iff 3 \iff 4 \iff 5 \iff 6 \iff 7$. Il reste donc juste à relier 1 avec les 6 autres assertions. Mais, on sait que φ est bijective si et seulement si la matrice de φ dans toute base de E est inversible et donc si et seulement si $\det(\varphi) \neq 0$. □

Th. du rang : $\dim E = \underbrace{\mathrm{rang}\,\varphi}_{= \dim \mathrm{Im}\,\varphi} + \underbrace{\dim \mathrm{Ker}\,\varphi}_{=0}$

1.4 Valeurs propres et vecteurs propres

1.4.1 Premières définitions

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Un vecteur $\boxed{\textit{non nul}}$ $v \in \mathbb{K}^n$ est un **vecteur propre** de A si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Av = \lambda v$. Dans ce cas, on dit que λ est la **valeur propre** associée à v. Un

$v \neq 0$ $\quad Av = \lambda v,\ Av = \mu v \quad \lambda \neq \mu$

$$\Rightarrow \lambda v = \mu v, \quad (\lambda - \mu) v = 0 \Rightarrow \lambda - \mu = 0 \quad \#$$

scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si et seulement si il existe un vecteur $v \in \mathbb{K}^n$ (non nul) dont c'est la valeur propre associée. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le **spectre** de A.

$$Av = \lambda v$$

Proposition 1.27. *Un vecteur $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq 0$, est un vecteur propre de A de valeur propre 0 si et seulement si $v \in \mathrm{Ker}(A)$. En particulier, 0 est valeur propre de A si et seulement si $\det(A) = 0$.*

v vecteur propre associé à 0

Démonstration. On a : v vecteur propre de valeur propre 0 ssi $Av = 0 \cdot v = 0$ ssi $v \in \mathrm{Ker}(A)$ ce qui démontre le premier point. Maintenant, 0 est valeur propre ssi il existe $v \neq 0$ dans $\mathrm{Ker}(A)$ donc ssi $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$ ssi $\det(A) = 0$. □

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\times 0 + 1\times 1 \\ 1\times 1 + 1\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc le vecteur ${}^t(1,1)$ est vecteur propre de A associée à la valeur propre 1. Par ailleurs, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc le vecteur ${}^t(1,-1)$ est vecteur propre de A associée à la valeur propre -1.

1 et -1 sont dans le spectre de A

$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\lambda=1$

Le résultat suivant est une généralisation directe du résultat précédent.

$A-\lambda I_2$

Proposition 1.28. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

$\|$

1. *λ est valeur propre de A,*
2. *$\mathrm{Ker}(A-\lambda \mathbf{I}_n) \neq \{0\}$,*
3. *$\det(A-\lambda \mathbf{I}_n) = 0$.*

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda I_2)=(-1)\times(-1)-1\times 1=0$

Soit λ une valeur propre de A. On appelle sous-espace propre associée à λ, dénoté E_λ, l'ensemble formé des vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul. On a donc $E_\lambda = \boxed{\mathrm{Ker}(A-\lambda \mathbf{I}_n)}$ et ainsi E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Si $v \in E_\lambda$

Proposition 1.29. *Soit λ une valeur propre de A. Alors E_λ est stable par multiplication par A. De plus, si μ est une autre valeur propre de A alors $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$.*

alors $Av \in E_\lambda$

Démonstration. Soit $v \in E_\lambda$. On a $Av = \lambda v \in E_\lambda$ puisque E_λ est un espace vectoriel. Maintenant, supposons que $v \in E_\lambda \cap E_\mu$. Alors, on a $Av = \lambda v = \mu v$ d'où $(\lambda-\mu)v = 0$ et donc $v = 0$ puisque $\lambda \neq \mu$. □

$\lambda v \in E_\lambda$

Ce résultat se généralise à plusieurs valeurs propres. Une conséquence est que la matrice A a au plus n valeurs propres.

$E_{\lambda_1},\dots,E_{\lambda_s}$ sev de $\mathbb{K}^n$

Proposition 1.30. *Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ des valeurs propres distinctes de A. Alors, les sous-espaces propres $E_{\lambda_1},\dots,E_{\lambda_s}$ sont en somme directe.* □

$n \geq \dim(E_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus E_{\lambda_s}) = \dim E_{\lambda_1}+\cdots+\dim E_{\lambda_s}$

$x^2+1 = \frac{1}{2}(2x^2+2)$

$\geq 1+\dots+1 \geq s$

1.4.2 Rappels sur les polynômes

$x^2-1 = (x-1)(x+1)$

On rappelle que $\mathbb{K}[T]$ dénote l'ensemble des polynômes en coefficient dans $\mathbb{K}$ en la variable T. Soit $f(T) \in \mathbb{K}$ avec $f \neq 0$, on a

poly.

x^2-x+2 unitaire de degré 2

$$f(T) = a_d T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \cdots + a_0$$

avec $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$ et $a_d \neq 0$. L'entier $d \geq 0$ est le degré de f. Le scalaire a_d est le coefficient dominant de f. On dit que f est **unitaire** si son coefficient dominant est égal à 1.

Proposition 1.31 (Division euclidienne)**.** *Soient $f(T) \in \mathbb{K}[T]$ avec $f(T) \neq 0$. Alors, pour tout polynôme $g(T) \in \mathbb{K}[T]$, il existe deux polynômes $q(T), r(T) \in \mathbb{K}[T]$ tels que $g(T) = f(T)q(T)+r(T)$ et $r(T) = 0$ ou $\deg(r) < \deg(f)$. De plus, les polynômes q et r sont uniques. On les appelle le **quotient** et le **reste** de la division (euclidienne) de g par f.*

$g = fq$

Si le reste de la division de f par g est 0, on dit que f **divise** g. Supposons que $\deg(f) \geq 1$. On dit que f est **irréductible** si, pour factorisation $f = gh$ avec $g, h \in \mathbb{K}[T]$, on a $\deg(g) = 0$ ou $\deg(h) = 0$. Sinon, f est dit **réductible**.

$\rightarrow$ g ou h en constant

Théorème 1.32 (PGCD)**.** *Soient f et g deux polynômes dans $\mathbb{K}[T]$ tels que l'un des deux au moins est non nul. Alors, il existe un unique polynôme $\boxed{\text{unitaire}}$ $d(T) \in \mathbb{K}[T]$ tel que d divise f et d divise g, et si $h(T) \in \mathbb{K}[T]$ est un polynôme tel que h divise f et g, alors h divise d. On appelle d le **plus grand commun diviseur (PGCD)** de f et g.*

Algo. de Euclide

Soient f et g deux polynômes dans $\mathbb{K}[T]$ tels que l'un des deux au moins est non nul. On dit que f et g sont **premiers entre eux** si leur PGCD est 1.

Théorème 1.33 (Relation de Bezout)**.** *Soient f et g deux polynômes dans $\mathbb{K}[T]$ tels que l'un des deux au moins est non nul. Alors, f et g sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux polynômes $u, v \in \mathbb{K}[T]$ tels que*

$$f(T)u(T) + g(T)v(T) = 1.$$

Soit $f \in \mathbb{K}[T]$ avec $f \neq 0$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est **racine** ou **zéro** de f si on a $f(\alpha) = 0$.

Proposition 1.34. *Soit $f \in \mathbb{K}[T]$ avec $f \neq 0$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors, α est racine de f si et seulement si $(T - \alpha)$ divise f.*

Démonstration. On fait la division de $f(T)$ par $T - \alpha$

$$\boxed{f(T) = (T - \alpha)q(T) + r}$$

$f(\alpha) = r$

avec $\boxed{r \in \mathbb{K}}$ puisque $\deg(T - \alpha) = 1$. Puisque α est racine de $T - \alpha$, on trouve que α est racine de f si et seulement si $r = 0$ si et seulement $T - \alpha$ divise $f(T)$. $\square$

Soit α une racine du polynôme $f(T) \in \mathbb{K}[T]$. On peut écrire de manière unique

$$\boxed{f(T) = (T - \alpha)^m g(T)}$$

avec $m \geq 1$, un entier, et g un polynôme tel que $g(\alpha) \neq 0$. On appelle l'entier m la **multiplicité** de la racine α.

Un polynôme $f(T) \in \mathbb{K}[T]$, non nul et de degré ≥ 1, est dit **scindé** sur $\mathbb{K}$ si f possède toutes ses racines dans $\mathbb{K}$; en d'autres termes, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ dans $\mathbb{K}$ et des entiers $m_1 \dots, m_t \geq 1$ tels que

$$\boxed{f(T) = (T - \alpha_1)^{m_1} \cdots (T - \alpha_t)^{m_t}.} \tag{1.1}$$

Théorème 1.35. *Tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$.*

Ce n'est pas vrai sur $\mathbb{R}$ ex. X^2+1

1.4.3 Polynôme caractéristique

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, le **polynôme caractéristique** de A est défini par

$$C_A(T) = \det(A - T\,\mathbf{I}_n).$$

$C_A(0) = \text{dét}(A - 0 \times I)$
$= \text{dét}(A)$

C'est un polynôme de degré n dont le terme dominant est $(-1)^n$.

Proposition 1.36. *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. De plus, on a* $\det(A) = C_A(0) = a_0$ *et* $Tr(A) = -a_{n-1}$ *où* $C_A(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_{n-1} T^{n-1} + (-1)^n T^n$.

$-Tr(A)$

Démonstration. On montre juste la première affirmation ; l'affirmation concernant le déterminant est directe à montrer. Soient A et B deux matrices semblables. Par hypothèse, il existe une

$C_A(T) = \det(A - T I_n)$

$I_n = P^{-1} I_n P$

matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. On calcule

$$
\begin{aligned}
C_B(T) &= \det(P^{-1}AP - T\,\mathbf{I}_n) \\
&= \det(P^{-1}(A - T\,\mathbf{I}_n)P) \\
&= \det(\cancel{P})^{-1} \det(A - T\,\mathbf{I}_n) \det(\cancel{P}) = C_A(T).
\end{aligned}
$$

□

Théorème 1.37. *Un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si λ est une racine de $C_A(T)$.*

λ valeur propre ssi $\det(A - \lambda I_n) = 0$ ssi $C_A(\lambda) = 0$ ssi λ racine de C_A

Exemple. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule

$$C_A(T) = \det \begin{pmatrix} -T & 2 \\ 1 & -T \end{pmatrix} = T^2 - 2.$$

Les deux racines sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, ce sont donc les deux valeurs propres de A. On vérifie que $\sqrt{2}$ est bien une valeur propre en cherchant un vecteur propre correspondant. On cherche donc $v = {}^t(x, y)$ tel que

$Av = \sqrt{2} v$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2y = \sqrt{2}x \\ x = \sqrt{2}y \end{cases} \iff \{ x = \sqrt{2} y$$

Une solution est $\boxed{{}^t(\sqrt{2}, 1)}$, c'est bien un vecteur propre de valeur propre $\sqrt{2}$.

1.4.4 Polynôme minimal et théorème de Cayley-Hamilton

Soit $f(T) = \lambda_m T^m + \cdots + \lambda_1 T + \lambda_0 \in \mathbb{K}[T]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On définit

$T \leftarrow A$

$$f(A) = \lambda_m A^m + \cdots + \lambda_1 A + \lambda_0 \mathbf{I}_n \in M_n(\mathbb{K}).$$

Proposition 1.38. *Soient f et g deux polynômes dans $\mathbb{K}[T]$ et soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a*

1. $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$,
2. $(fg)(A) = f(A)g(A) = g(A)f(A)$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme annulateur** de A tout polynôme *non nul* $f \in \mathbb{K}[T]$ vérifiant $f(A) = 0$ (matrice nulle).

Exemple. Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est

$$C_A(T) = T^2 - \mathrm{Tr}(A)T + \det(A).$$

On montre que $C_A(T)$ est un polynôme annulateur de A.

Proposition 1.39. *Toute matrice carrée possède un polynôme annulateur.*

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Posons $m = \dim(M_n(\mathbb{K})) = n^2$. On considère la famille de matrices $(\mathbf{I}_n, A, A^2, \cdots, A^m)$ Cette famille possède $m+1$ et donc elle est liée. Ainsi, il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, non tous nuls, tels que

$$\lambda_0 \mathbf{I}_n + \cdots + \lambda_m A^m = 0.$$