Prop: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in M_n(\mathbb{K})$

λ valeur propre de A ssi $\det(A - \lambda I) = 0$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda = 2$ valeur propre de A ?

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - 2I) = (-2)(-2) - 1 \times 1 = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

Réponse : non

---

1 est valeur propre de A. Calculer E_1

(sous espace propre associé à 1)

$v \in E_1$ ssi $Av = 1 \times v = v$

On écrit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on résout l'équation

$Av = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ et donc $Av = v$ ssi

$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases}$ ssi $\{ x = y$

Solution : sev de dim. $2 - 1 = 1$ et de base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$x^4 - x^2 - 3x + 2$ divisé par $x^2 + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - x^2 - 3x + 2 & x^2 + 1 \\
\underline{x^4 + x^2} & \overline{x^2 - 2} \\
\quad -2x^2 - 3x + 2 & \\
\quad \underline{-2x^2 \qquad\quad - 2} & \\
\qquad\quad -3x + 4 &
\end{array}
$$

quotient reste

$$x^4 - x^2 - 3x + 2 = (x^2+1)(x^2-2) + (-3x+4)$$

Polynômes caractéristiques

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C_A(T) = \det\left(A - T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} -T & 1 \\ 1 & -T \end{pmatrix}$$

$$= (-T)(-T) - 1 \times 1$$

$$= T^2 - 1 = (T-1)(T+1)$$

1, −1 sont valeurs propres

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C_B(T) = \det \begin{pmatrix} 1-T & 0 & 2 \\ 0 & -T & 1 \\ -1 & 0 & 1-T \end{pmatrix}$

$$= (-T) \begin{vmatrix} 1-T & 2 \\ -1 & 1-T \end{vmatrix} = (-T)\left((1-T)(1-T) - 2 \times (-1)\right)$$

$$= -T\left(T^2 - 2T + 1 + 2\right) = -T^3 + 2T^2 - 3T$$

- 0 est racine de $C_B(T)$ donc 0 est valeur propre de B

Il existe $v \neq 0$ tel que $Bv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (à calculer)

- Autres valeurs propres ?

$$C_B(T) = -T\,(\underbrace{T^2 - 2T + 3}_{})$$

racine 0   autres racines (à calculer)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad f(T) = T^2 - 2T + 2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(B)\ ? \qquad f(B) = B^2 - 2B + 2I_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ +2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc f n'est poly. annulateur de B

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(T) = C_A(T) = T^2 - 1$

$$\rightsquigarrow f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$