1.4.4 Polynôme minimal et théorème de Cayley-Hamilton

Soit $f(T) = \lambda^m T^m + \cdots + \lambda_1 T + \lambda_0 \in \mathbb{K}[T]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On définit

$$f(A) = \lambda_m A^m + \cdots + \lambda_1 A + \lambda_0 \mathbf{I}_n \in M_n(\mathbb{K}).$$

Proposition 1.38. *Soient f et g deux polynômes dans $\mathbb{K}[T]$ et soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a*

1. $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$,
2. $(fg)(A) = f(A)g(A) = g(A)f(A)$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme annulateur** de A tout polynôme *non nul* $f \in \mathbb{K}[T]$ vérifiant $f(A) = 0$ (matrice nulle).

Exemple. Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est

$$C_A(T) = T^2 - \mathrm{Tr}(A)T + \det(A).$$

On montre que $C_A(T)$ est un polynôme annulateur de A.

Proposition 1.39. *Toute matrice carrée possède un polynôme annulateur.*

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Posons $m = \dim(M_n(\mathbb{K})) = n^2$. On considère la famille de matrices $(\mathbf{I}_n, A, A^2, \cdots, A^m)$ Cette famille possède $m+1$ et donc elle est liée. Ainsi, il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, non tous nuls, tels que

$$\lambda_0 \mathbf{I}_n + \cdots + \lambda_m A^m = 0.$$

Il suit que le polynôme $\lambda_m T^m + \cdots + \lambda_0$ est un polynôme annulateur de A. $\square$

Si $f(A) = 0$ alors $g(A) = 0$ où $g = \lambda . f$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme minimal** de A, le polynôme unitaire $m_A(T)$ annulateur de A et de plus petit degré.

Proposition 1.40. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le polynôme minimal $m_A(T)$ de A est unique et divise tout polynôme annulateur de A.*

Démonstration. On montre pour commencer la deuxième assertion. Soit $f(T)$ un polynôme annulateur de A. Par division euclidienne, on peut écrire

$$f(T) = m_A(T)q(T) + r(T)$$

avec $r(T) = 0$ ou $\deg(r) < \deg(m_A)$. Supposons que $r \neq 0$. Puisque $f(A) = m_A(A) = 0$, on en déduit que $r(A) = 0$ et donc r est un polynôme annulateur de A avec $\deg(r) < \deg(m_A)$. Ceci est une contradiction car le degré de m_A est minimal. Ainsi, on a $r = 0$ et $m_A(T)$ divise $f(T)$.

Maintenant, supposons que $m_0(T) \in \mathbb{K}[T]$ est un autre polynôme unitaire annulateur de A avec $\deg(m_A) = \deg(m_0)$. Alors, on a que $m_A(T)$ divise $m_0(T)$. Comme ils sont de même degré, il suit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $m_0(T) = \lambda m_A(T)$. Mais, comme les polynômes $m_0(T)$ et $m_A(T)$ sont unitaires, on trouve que $\lambda = 1$ et donc $m_0(T) = m_A(T)$. Donc le polynôme minimal est bien unique. $\square$

1. Calcul de C_A

2. calcul des

Le résultat fondamental sur les polynômes annulateurs est le suivant.

$Ax = \lambda x$

$= \lambda^2 x$

$A^2x = A(Ax) = A\lambda x = \lambda Ax$; $= \det(A - T I)$

Théorème 1.41 (Cayley-Hamilton)**.** *Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée est un polynôme annulateur de cette matrice. En d'autres termes, pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\boxed{C_A(A) = 0}$.* □

Corollaire 1.42. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $f(T)$ est un polynôme annulateur de A, alors les valeurs propres de A sont parmi les racines de f. En particulier, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une racine de $m_A(T)$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A. Alors, il existe un vecteur non nul x tel que $Ax = \lambda x$. On pose $f(T) = a_nT^n + \cdots + a_0$ et on calcule

matrice

$$\boxed{f(A)x = a_nA^nx + \cdots + a_1Ax + a_0x = a_n\lambda^nx + \cdots + a_1\lambda x + a_0x = f(\lambda)x.} = 0$$

D'un autre côté, on a $f(A) = 0$ puisque f est un polynôme annulateur de A et donc on a $\boxed{f(\lambda) = 0}$ puisque $x \neq 0$. On a bien montré que λ est une racine de f.

Maintenant, le polynôme minimal m_A divise le polynôme caractéristique puisque le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur par le théorème de Cayley-Hamilton. Donc les racines de m_A sont parmi les valeurs propres de A. En combinant avec le premier point, on en déduit que les racines de m_A sont exactement les valeurs propres de A. □

vp et donc divisible par le poly. min.

m_A = poly. min.

3. déterminer m_A

1.4.5 Valeurs propres d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est un **valeur propre** de λ si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Il existe un vecteur $v \in E$, $v \neq 0$, tel que $\varphi(v) = \lambda v$, $\to$ $\varphi(v) - \lambda v = 0$
2. $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathbf{id}) \neq \{0\}$, $(\varphi - \lambda\, \mathrm{id})(v) = 0$
3. $\det(u - \lambda \mathbf{id}) = 0$,
4. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit A la matrice de φ sur cette base, alors λ est valeur propre de A.

Comme précédemment, dans ce cas, on appelle **vecteur propre** associé à λ, tout vecteur v non nul tel que $\varphi(v) = \lambda v$.

Le **polynôme caractéristique** de φ est le polynôme caractéristique de la matrice de A dans une base de E. Comme vu précédemment, ce polynôme ne dépend pas du choix de la base et on le note $C_\varphi(T)$.

Proposition 1.43. *L'ensemble des valeurs propres de φ, appelé le* ***spectre*** *de φ, est égal à l'ensemble des racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme caractéristique $C_\varphi(T)$.*

1.5 Diagonalisation

1.5.1 Problème de la diagonalisation

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **diagonalisable** si A est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D de

matrices inversibles

$P^{-1}AP = D$ D diagonale

type n telles que

$$\boxed{A = PDP^{-1}.}$$

Supposons A diagonalisable, **diagonaliser** A consiste à calculer des matrices P et D vérifiant cette relation. (En général, les matrices P et D ne sont pas uniques.)

Théorème 1.44. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors, la matrice A est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A.*

Démonstration. Supposons que la base $(v_1, \cdots, v_n)$ de E est formée de vecteurs propres associées respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On pose $\boxed{P = (v_1|\cdots|v_n)}$. On calcule

P

$\begin{pmatrix} v_1 | v_2 | \cdots | v_n \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} Av_1 | Av_2 | \cdots \end{pmatrix}$

$$AP = (Av_1|\cdots|Av_n) = (\lambda_1 v_1|\cdots|\lambda_n v_n) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

et donc A est diagonalisable.

Réciproquement, supposons A diagonalisable. Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que $\boxed{A = PDP^{-1}}$. Alors, on vérifie comme ci-dessus que les colonnes de P forment une base de $\mathbb{K}^n$ composée de vecteurs propres de A. □

Corollaire 1.45. *Supposons A est diagonalisable. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ telle que, pour $i = 1, \ldots, n$, le vecteur v_i est vecteur propre de A associée à la valeur propre λ_i. On*

Diagonaliser = trouver une base formée de vecteurs propres

pose

$$\boxed{P = (v_1|\cdots|v_n)} \quad \text{et} \quad \boxed{D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}}.$$

Alors, on a $A = PDP^{-1}$.

nombre de valeurs propres $\leq n$

Corollaire 1.46. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$. *Supposons que* A *possède* n *valeurs propres distinctes. Alors,* A *est diagonalisable.*

Démonstration. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et soit $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs propres associés. Alors, on a les sous-espaces vectoriels $\mathbb{K}v_1, \dots, \mathbb{K}v_n$ sont en somme directe et donc $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres. $\square$

$$\underbrace{\mathbb{K}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}v_n}_{\text{dim. } n} = \mathbb{K}^n$$

Attention : il peut exister des matrices dans $M_n(\mathbb{K})$ avec strictement moins de valeurs propres que n qui sont pourtant diagonalisables.

1.5.2 Caractérisation des matrices diagonalisables

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On rappelle que, pour λ une valeur propre de A, on dénote par E_λ le sous-espace propre associé à λ, c'est-à-dire

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathbf{I}_n). \qquad \dim E_\lambda \geq 1$$

multiplicité de λ

Proposition 1.47. *Soit λ une valeur propre de A et soit m la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique $C_A(T)$ de A. Alors, on a*

$$\boxed{1 \le \dim E_\lambda \le m.}$$

$C_A(T) = (T-\lambda)^m g(T)$

avec $g(\lambda) \neq 0$

On en déduit la caractérisation des matrices diagonalisables.

Théorème 1.48. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres de A.* distinctes *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

($s \le n$)

1. *A est diagonalisable,*
2. *On a $\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_s}$,*
3. *Pour $i = 1, \dots, s$, on a $\dim E_{\lambda_i} = m_i$ où m_i est la multiplicité de λ_i comme racine de $C_A(T)$ et*

$\dim E_{\lambda_i} \le m_i$ en général

$$\boxed{m_1 + \cdots + m_s = n.}$$

pour le cas où C_A n'est pas scindé

Corollaire 1.49. *Supposons que le polynôme caractéristique $C_A(T)$ de A n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, A n'est pas diagonalisable.*

Ce corollaire ne s'applique que quand $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$ car tout les polynôme sont scindés sur $\mathbb{C}$. De fait, il existe des exemples de matrices carrées réelles qui ne sont pas diagonalisables sur $\mathbb{R}$, mais sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

$A = PDP^{-1}$

$A \in M_n(\mathbb{R})$

$P, D \in M_n(\mathbb{C})$

$\det(\lambda I - A) = \det(-(A - \lambda I))$

$= (-1)^n \det(A - \lambda I)$

1.5.3 Méthode de diagonalisation

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La méthode pour déterminer si la matrice A est diagonalisable et la diagonaliser si c'est possible est la suivante :

$\{v : Av = \lambda v\}$

$\mathbin{/\!/}$

$E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{Id})$

1. Calculer le polynôme caractéristique $C_A(T)$ de A.
2. Calculer les racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ de $C_A(T)$ dans $\mathbb{K}$ et leur multiplicité $m_1, \ldots, m_s$.
3. Si $m_1 + \cdots + m_s < n$ alors $C_A(T)$ n'est pas scindé et A n'est pas diagonalisable et le processus s'arrête.
4. Pour $i = 1, \ldots, s$, faire

   $m_1 + \cdots + m_s = n$

   (a) Calculer la dimension d de E_{λ_i}.

   (b) Si $d < m_i$, alors A n'est pas diagonalisable et le processus s'arrête.

   (c) Calculer une base $(v_{i,1}, \ldots, v_{i,m_i})$ de E_{λ_i}.
5. La matrice A est diagonalisable. On pose

bases trouvées

valeurs propres répétées

$$P = (\underbrace{v_{1,1}|\cdots|v_{1,m_1}}_{\lambda_1}|\underbrace{\cdots}_{\lambda_2}|\underbrace{v_{s,1}|\cdots|v_{s,m_s}}_{\lambda_s}) \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix}$$

m_1 fois

m_2 fois

$\vdots$

m_s fois

la matrice P est obtenue en réunissant les bases calculées en 4.(c) et la matrice D est la matrice diagonale avec sur la diagonale les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ répétées avec leur multiplicité. Alors, on a

$$A = PDP^{-1}.$$

Exemple. On cherche à diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$C_A(T) = \det(A - T\,\mathrm{Id})$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 = 0$

1. On calcule $C_A(T) = T^3 - 5T^2 + 8T - 4$.
2. La racine $\lambda_1 = 1$ est évidente. On divise $C_A(T)/(T-1) = T^2 - 4T + 4 = (T-2)^2$.
   Donc on a $m_1 = 1$ et l'autre racine est $\lambda_2 = 2$ de multiplicité $m_2 = 2$.
3. Puisque $\boxed{m_1 + m_2 = 3,}$ il n'y a pas d'obstacle (pour l'instant) à diagonaliser A.
4. $i = 1 : \lambda = 1$ et $m = 1$.

$Av = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ y + z \\ 2z \end{pmatrix}$

$C_A(T) = (T-1)(T-2)^2$

   (a) Le vecteur $v = {}^t(x, y, z) \in E_1$ ssi $Av = v$ ssi

$$\left\{\begin{aligned} 2x - y + z &= x \\ y + z &= y \\ 2z &= z \end{aligned}\right. \quad \text{ssi} \quad \left\{\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right. \quad \text{ssi} \quad \boxed{\left\{\begin{aligned} x - y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right.} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$$

   (b-c) Donc E_1 est de dimension $\underline{3 - 2 = 1}$ avec pour $\boxed{\text{base } ({}^t(1, 1, 0))}$.

solution « simple » du système (non nulle)

$1 \leqslant \dim E_1 \leqslant 1 \Rightarrow \dim E_1 = 1$

4. $i = 2 : \lambda = 2$ et $m = 2$.

$1 \leq \dim E_2 \leq m_2 = 2$

(a) Le vecteur $v = {}^t(x, y, z) \in E_2$ ssi $\boxed{Av = 2v}$ ssi

$y = z$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2x \\ y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} -y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases} \text{ ssi } \boxed{-y + z = 0}$$

$$a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

(b-c) Donc E_2 est de dimension $3 - 1 = \boxed{2}$ avec pour base $\boxed{({}^t(0, 1, 1), {}^t(1, 0, 0))}$.

5. La matrice A est diagonalisable. On pose

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on a $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

valeurs propres avec mult.

1.5.4 Applications de la diagonalisation des matrices

Proposition 1.50. *Supposons que A est diagonalisable et que les valeurs propres de A sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ de multiplicité $m_1, \ldots, m_s$. Alors, on a*

$$\operatorname{Tr} A = m_1\lambda_1 + \cdots + m_s\lambda_s \quad \textit{et} \quad \det A = \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_s^{m_s}.$$

produit des valeurs propres avec mult.

↑ somme des valeurs propres avec mult.

Démonstration. Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D la matrice diagonale dont la diagonale est

$$(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1}, \cdots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{m_s})$$

de telle sorte que $A = PDP^{-1}$. Alors, on a

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PDP^{-1}) = \mathrm{Tr}(D) = m_1\lambda_1 + \cdots + m_s\lambda_s,$$
$$\det(A) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) = \det(D) = \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_s^{m_s}. \qquad \square$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}$$

m_1

m_2

m_s

Remarque. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le résultat est aussi vrai si la matrice A n'est pas diagonalisable.

Notons que diagonaliser une matrice n'est pas une méthode efficace pour calculer le déterminant d'une matrice en général. De fait, pour cela, il est déjà nécessaire de calculer le polynôme caractéristique $C_A(T)$ de A est

$$C_A(0) = \det(A).$$

$C_A(T) = \text{dét}(A - T\,\mathrm{Id})$

$C_A(0) = \text{dét}(A)$

Proposition 1.51. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_n(K)$ telles que*

$$A = PBP^{-1}.$$

Alors, pour tout $k \geq 1$, on a

$$A^k = PB^kP^{-1}.$$

Si, de plus, B est inversible alors A est inversible et, pour tout $k \geq 1$, on a

$$A^{-k} = PB^{-k}P^{-1}.$$

$$A^k = \underbrace{A \cdots\cdots A}_{k \text{ fois}}$$

Démonstration. Soit $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
A^k &= \underbrace{(PB\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}B\cancel{P^{-1}})\cdots(\cancel{P}BP^{-1})}_{k \text{ fois}} \\
&= PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)BP^{-1} \\
&= P\underbrace{B\cdots B}_{k \text{ fois}}P^{-1} = PB^kP^{-1}.
\end{aligned}$$

Dans le cas où B est inversible, on a

$$A(PB^{-1}P^{-1}) = PBP^{-1}PB^{-1}P = PBB^{-1}P^{-1} = PP^{-1} = \mathbf{I}_n$$

et donc $A^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$. Le reste de la démonstration se fait de manière similaire au cas précédent. □

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Soit D la matrice diagonale dont la diagonale est

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $k \geq 1$, la matrice D^k est diagonale et sa diagonale est

$$(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k).$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & & 0 \\ & 1/\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

Si, de plus, $\lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$, alors D est inversible et, pour tout $k \geq 1$, la matrice D^{-k} est diagonale et sa diagonale est

$$(\lambda_1^{-k}, \ldots, \lambda_n^{-k}).$$

En combinant la proposition et cette remarque, on peut en déduire des formules pour les puissances de matrices diagonalisables.

formule pour A^k ?

Exemple. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont 1 et 3 et on trouve la diagonalisation

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Notons que

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^k+1 & 3^k-1 \\ 3^k-1 & 3^k+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

on calcule

$$\begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 28 & 26 \\ 26 & 28 \end{pmatrix} = A^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^3+1 & 3^3-1 \\ 3^3-1 & 3^3+1 \end{pmatrix}$$

$$k! = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 1\times 2\times \cdots \times k & \text{si } k\geq 1 \end{cases}$$

Une autre application de la diagonalisation est pour le calcul de l'**exponentielle de matrice**. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose

$$e^A = \exp(A) = \mathbf{I}_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k.$$

$A^0 = I_n$

L'exponentielle de matrices joue un rôle important notamment dans la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires.

Remarque. La fonction classique exponentielle est donnée, pour $z \in \mathbb{C}$, par

$$e^z = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!}.$$

Théorème 1.52. *Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, la matrice e^A existe et vérifie les propriétés suivantes :*

1. *La matrice e^A est inversible et son inverse est e^{-A},*
2. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent, c'est-à-dire $AB = BA$, alors*
$$\boxed{e^{A+B} = e^A\, e^B.}$$
3. *Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, une matrice inversible, on a*
$$e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}.$$

Démonstration. La preuve de *2.* est similaire à la preuve de la formule classique $e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}e^{\beta}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Maintenant, on a

A et $-A$ commutent

$$e^{A}e^{-A} = e^{A-A} = e^{0} = \mathbf{I}_n$$

donc e^A est inversible et son inverse est e^{-A} ce qui prouve *1.* Finalement, pour la preuve de *3*, on a

$$e^{PAP^{-1}} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(PAP^{-1})^k = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}PA^kP^{-1} = P\left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k\right)P^{-1} = Pe^AP^{-1}. \qquad \square$$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Comme dans le cas des puissances de matrices, le fait essentiel est que l'exponentielle d'une matrice diagonale est facile ~~est~~ à calculer. Plus précisément, soit la matrice diagonale D dont la diagonale est $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors la matrice e^D est diagonale avec pour diagonale

$$(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}).$$

$\Rightarrow e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Exemple. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont 1 et 3 et on trouve la diagonalisation

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Notons que

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^DP^{-1}$$

On en déduit que

$$e^A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on calcule

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e+e^3 & -e+e^3 \\ -e+e^3 & e+e^3 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 2

Algèbre bilinéaire

forme linéaire : E $\mathbb{K}$-ev

$f : E \to \mathbb{K}$ linéaire

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ $x, y \in E$

$\to f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $\lambda \in \mathbb{K}$

2.1 Formes bilinéaires

2.1.1 Définitions

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **forme bilinéaire** est un application Φ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ linéaire par rapport à chaque argument. C'est-à-dire, pour $x, x', y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \Phi(x + x', y) &= \Phi(x, y) + \Phi(x', y), \\ \Phi(x, y + y') &= \Phi(x, y) + \Phi(x, y'), \\ \Phi(\lambda x, y) &= \Phi(x, \lambda y) = \lambda\Phi(x, y). \end{aligned}$$

Φ phi

Les formes bilinéaires constituent un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, noté $L_2(E)$. Nous déterminerons la structure de cet espace dans la prochaine section.

$$\Phi(f_1+f_2, g) = \int_0^1 (f_1+f_2)(t)\, g(1-t)\, dt = \int_0^1 (f_1(t)+f_2(t))\, g(1-t)\, dt$$

Exemples.

1. $E = \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = xy$.
2. $E = C^{\infty}([0, 1])$, $\Phi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(1-t)\, dt$.

Dorénavant, on suppose E de dimension finie n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on écrit les décompositions :

$x, y \in E$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i.$$

$$\Phi(x, y) = \Phi\Big(\sum_i \lambda_i e_i, \sum_j \mu_j e_j\Big)$$

Par la linéarité de Φ, on trouve alors que :

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overset{x}{\lambda_i} \overset{y}{\mu_j}\, \underbrace{\Phi(e_i, e_j)}_{\Phi}.$$

On pose $a_{i,j} = \Phi(e_i, e_j)$ et on introduit la matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle A la **matrice représentant Φ sur la base $\mathcal{B}$**. On note X (resp. Y) le vecteur représentant x (resp. y) sur la base $\mathcal{B}$. L'expression matricielle de Φ est donnée par :

$$\boxed{\Phi(x, y) = {}^t X\, A\, Y.}$$

expression matricielle

X x sur base $\mathcal{B}$

Y y sur base $\mathcal{B}$

Remarque. La réciproque est aussi vraie, toute application de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ qui peut s'écrire sous cette forme est une forme bilinéaire.

Théorème 2.1. *L'application de $L_2(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$ définit par $\Phi \mapsto A$ où A est la matrice de Φ relativement à une base fixée de $\mathbb{K}$, est un isomorphisme. En particulier, $L_2(\mathbb{K})$ est de dimension n^2.* □

Pour conclure cette section, on étudie la transformation de la matrice A quand on change la base $\mathcal{B}$. Ainsi, soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une autre base de E. Posons X' (resp. Y') le vecteur exprimant x (resp. y) sur $\mathcal{B}'$. On note P la matrice de changement de base de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. (Rappel : c'est la matrice dont les colonnes sont les expressions des vecteurs e'_i sur la base $\mathcal{B}$.) On a ainsi :

$$X = PX' \qquad \text{et} \qquad Y = PY',$$

d'où :

$$\Phi(x, y) = {}^tX\,AY = {}^tX'\,{}^tPAPY'$$

et la matrice A' représentant Φ sur la base $\mathcal{B}'$ est :

$$A' = {}^tPAP.$$