Les formes bilinéaires constituent un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, noté $L_2(E)$. Nous déterminerons la structure de cet espace dans la prochaine section.

$\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$

$\Phi(x,y) \in \mathbb{K}$

linéaire

Exemples.

1. $E = \mathbb{R}$, $\Phi(x,y) = xy$.
2. $E = C([0,1])$, $\Phi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(1-t)\,dt$.

Dorénavant, on suppose E de dimension finie n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on écrit les décompositions :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i,$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, e_i.$$

Par la linéarité de Φ, on trouve alors que :

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \boxed{\Phi(e_i,e_j)}. \to A$$

On pose $a_{i,j} = \Phi(e_i,e_j)$ et on introduit la matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle A la **matrice représentant Φ sur la base $\mathcal{B}$**. On note X (resp. Y) le vecteur représentant x (resp. y) sur la base $\mathcal{B}$. L'expression matricielle de Φ est donnée par :

$$\boxed{\Phi(x,y) = {}^t X\, A\, Y.}$$

$A = (\Phi(e_i, e_j))$

Remarque. La réciproque est aussi vraie, toute application de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ qui peut s'écrire sous cette forme est une forme bilinéaire.

Théorème 2.1. *L'application de $L_2(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$ définit par $\Phi \mapsto A$ où A est la matrice de Φ relativement à une base fixée de $\mathbb{K}$, est un isomorphisme. En particulier, $L_2(\mathbb{K})$ est de dimension n^2.* □

τ $\mathbb{K}$-ev

$\Phi \in L_2(E)$
$\mathcal{B}$ base
A matrice de Φ sur $\mathcal{B}$

Pour conclure cette section, on étudie la transformation de la matrice A quand on change la base $\mathcal{B}$. Ainsi, soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E. Posons X' (resp. Y') le vecteur exprimant x (resp. y) sur $\mathcal{B}'$. On note P la matrice de changement de base de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. (Rappel : c'est la matrice dont les colonnes sont les expressions des vecteurs e'_i sur la base $\mathcal{B}$.) On a ainsi :

$$\boxed{X = PX'} \quad \text{et} \quad \boxed{Y = PY',}$$

d'où :

$$\boxed{\Phi(x, y) = {}^tX\,A\,Y = {}^tX'\,{}^tPAP\,Y'} = {}^tX'({}^tPAP)Y'$$

↳ x sur $\mathcal{B}'$ ⇝ y sur $\mathcal{B}'$

et la matrice A' représentant Φ sur la base $\mathcal{B}'$ est :

$$A' = {}^tPAP.$$

$P \in Gl_n(\mathbb{K})$

$\Phi(AB) = \Phi(B,A)$

2.1.2 Formes bilinéaires symétriques ou alternées

Soit Φ une forme bilinéaire de E. On dit que Φ est **symétrique** si, pour tout $x, y \in E$, on a

$$\forall x,y \qquad \boxed{\Phi(x,y) = \Phi(y,x).}$$

On dit que Φ est **anti-symétrique** si, pour tout $x, y \in E$, on a

$$\forall x,y \qquad \boxed{\Phi(x,y) = -\Phi(y,x).}$$

Finalement, on dit que Φ est **alternée** si, pour tout $x \in E$, on a

$$\forall x \qquad \boxed{\Phi(x,x) = 0.}$$

Exemple. Soit $E = M_n(\mathbb{K})$. On considère l'application $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par $\boxed{\Phi(A,B) = \mathrm{Tr}(AB)}$. L'application Φ est une forme bilinéaire. Elle est symétrique car on a la relation $\boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)}$ pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

$\Phi(A+A',B)$
$= \mathrm{Tr}((A+A')B)$
$= \mathrm{Tr}(AB+A'B)$
$= \mathrm{Tr}(AB) + \mathrm{Tr}(A'B)$
$= \Phi(A,B) + \Phi(A',B)$

Proposition 2.2. *Toute forme bilinéaire est alternée si et seulement si elle est anti-symétrique.*

Démonstration. Soit Φ une forme bilinéaire alternée. Pour $x, y \in E$, on a $\Phi(x+y, x+y) = 0 = \Phi(x,x) + \Phi(y,y) + \Phi(x,y) + \Phi(y,x) = \Phi(x,y) + \Phi(y,x)$. On en déduit que $\Phi(x,y) = -\Phi(y,x)$ et Φ est anti-symétrique.

Soit Φ une forme bilinéaire anti-symétrique. Soit $x \in E$. On a $\Phi(x,x) = -\Phi(x,x)$ d'où $2\Phi(x,x) = 0$ et $\Phi(x,x) = 0$. $\square$

sym.

alt. $\Phi(x,y) = 0$

Φ sym. + alternée alors $\Phi(x,y) = \Phi(y,x) = -\Phi(x,y)$

On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. Soit $\Phi \in L_2(E)$ et soit A la matrice de Φ relativement à la base $\mathcal{B}$. La forme Φ est symétrique si et seulement si A est symétrique, c'est-à-dire ${}^tA = A$. La forme Φ est alternée si et seulement si ${}^tA = -A$, on dit que A est anti-symétrique ou alternée.

On note $\mathrm{Sym}_2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques et $\mathrm{Alt}_2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires alternées. On vérifie facilement que ce sont des sous-espaces vectoriels de $L_2(E)$.

$\mathrm{Sym}_2(E) \cap \mathrm{Alt}_2(E) = \{0\}$

Théorème 2.3. *On a*

$$\boxed{L_2(E) = \mathrm{Sym}_2(E) \oplus \mathrm{Alt}_2(E).}$$

Démonstration. Le seul point qui n'est pas direct est le fait que $\boxed{L_2(E) = \mathrm{Sym}_2(E) + \mathrm{Alt}_2(E)}$. Soit $\Phi \in L_2(\mathbb{K})$. On pose

$L_2(E) \ldots$

sym. $\rightarrow$

$$\Phi_0(x,y) = \frac{\Phi(x,y) + \Phi(y,x)}{2} \quad \text{et} \quad \Phi_1(x,y) = \frac{\Phi(x,y) - \Phi(y,x)}{2}.$$

On vérifie facilement que Φ_0 est symétrique et Φ_1 est anti-symétrique. De plus, on a directement $\boxed{\Phi = \Phi_0 + \Phi_1.}$ ∎

alt.

Remarque : Comme la somme est directe, c'est la seule manière d'écrire Φ comme (elt. de Sym_2) + (elt. de Alt_2)

2.1.3 Noyau et rang des formes bilinéaires symétriques ou alternées

gauche

Soit Φ une forme bilinéaire. On peut définir deux notions de noyau à gauche et à droite de la manière suivante

$\Phi(x,y)=0$

$$\operatorname{Ker}\Phi_g = \{x \in E \text{ tel que } \Phi(x,y) = 0, \forall y \in E\}$$
$$\operatorname{Ker}\Phi_d = \{y \in E \text{ tel que } \Phi(x,y) = 0, \forall x \in E\}.$$

droite

En termes de matrice, étant donné une matrice A de type n, cela revient à considérer d'une part l'ensemble des vecteurs X tels que ${}^tXA = 0$ et d'un autre côté l'ensemble des vecteurs Y tels que $AY = 0$. Si la matrice A est symétrique ou anti-symétrique, on a

$${}^tXA = 0 \iff {}^t({}^tXA) = 0 \iff {}^tAX = 0 \iff AX = 0.$$

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

${}^tA = A$ ou $-A$

On en déduit résultat suivant.

Lemme 2.4. *Soit Φ une forme bilinéaire symétrique ou alternée. On a* $\operatorname{Ker}\Phi_g = \operatorname{Ker}\Phi_d$.

On peut donc définir, pour Φ symétrique ou alternée, le **noyau** de Φ comme

$$\operatorname{Ker}\Phi = \{x \in E \text{ tel que } \Phi(x,y) = 0, \forall y \in E\} = \{y \in E \text{ tel que } \Phi(x,y) = 0, \forall x \in E\}.$$

définition

Soit Φ une forme bilinéaire symétrique ou alternée. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On note A la matrice de Φ relativement à la base $\mathcal{B}$. On montre que la dimension du noyau de Φ est

$\Phi \mapsto A$ $\quad$ $\Phi \mapsto {}^tA$ $\quad$ $\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$

égale à la dimension du noyau de A. On a donc par la formule du rang

dim Ker A

$$\dim \operatorname{Ker} \Phi = n - \operatorname{rang} A.$$

$\boxed{\text{Not } \Phi = (\Phi(e_i, e_j))}$ i ligne j colonne

Le **rang** d'une forme bilinéaire symétrique ou alternée Φ est défini comme le rang d'une matrice A représentant Φ relativement à une base arbitraire de E. On note $\operatorname{rang} \Phi$. La formule ci-dessus donne le résultat suivant.

rang Φ est défini pour que ça marche

Proposition 2.5. *Soit Φ une forme bilinéaire symétrique ou alternée de E, on a*

$$\dim E = \operatorname{rang} \Phi + \dim \operatorname{Ker} \Phi. \qquad \square$$

Une forme bilinéaire symétrique ou alternée Φ est **non dégénérée** si son noyau est l'espace nul, ce qui revient à dire que son rang est maximal. Dans le cas contraire, on dit que Φ est **dégénérée**.

Φ non dégénérée $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang} \Phi = n = \dim(E)$

Proposition 2.6. *Soit Φ une forme bilinéaire symétrique ou alternée. Soit A la matrice représentant Φ dans une base arbitraire de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Φ est non dégénérée,*
2. $\det(A) \neq 0$. $\square$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A = n \Leftrightarrow$

Exemples. Soit Ψ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\begin{aligned} \Psi({}^t(x_1, x_2), {}^t(y_1, y_2)) &= x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_2, \\ &= x_1(y_1 + y_2) + x_2(y_1 + y_2) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

La matrice de Ψ sur la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est nul. Donc Ψ est dégénérée. Le noyau de Ψ est la droite d'équation $x_1 + x_2 = 0$.

Soit Φ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{aligned}\Phi({}^t(x_1,x_2,x_3), {}^t(y_1,y_2,y_3)) &= -2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 \\ &= x_1(-2y_2+y_3) + x_2(2y_1-y_3) + x_3(-y_1+y_2).\end{aligned}$$

$$= y_1(2x_2 - x_3) + y_2(-2x_1 + x_3) + y_3(x_1 - x_2)$$

Ainsi, sous forme matricielle :

$$\Phi({}^t(x_1,x_2,x_3), {}^t(y_1,y_2,y_3)) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} -2y_2+y_3 \\ 2y_1-y_3 \\ -y_1+y_2 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

D'où l'expression matricielle de Φ sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matrice anti-symétrique}$$

$$\Phi(x,y) = x_1(-2y_2+y_3) + x_2(2y_1-y_3) + x_3(-y_1+y_2)$$

y tels que $\Phi(x,y) = 0$ $\forall x$ $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La forme Φ est alternée. Le déterminant de A est 0, donc Φ est dégénérée. Pour trouver le noyau, on résout le système

$y \in \operatorname{Ker}\Phi$ ssi

$$\begin{cases} -2y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_1 - y_3 = 0 \\ -y_1 + y_2 = 0. \end{cases} \to \text{dim. } 1$$

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\operatorname{Ker}\Phi = \operatorname{Vec}({}^t(1,1,2))$.

$\vec{x} = (x_1, x_2)$

$\vec{y} = (y_1, y_2)$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2$

2.2 Orthogonalité

Soit Φ une forme bilinéaire de E. Soient $x, y \in E$. On dit que y est **orthogonal** à x (relativement à Φ) si on a $\Phi(x,y) = 0$. On note $x \perp_\Phi y$ ou $x \perp y$ plus simplement quand il n'y pas de risque de confusion. Si Φ est symétrique ou alternée, la relation d'orthogonalité est symétrique : $x \perp y$ si et seulement si $y \perp x$. Dans le cas où Φ est symétrique ou alternée, tout élément de $\operatorname{Ker}\Phi$ est orthogonal à tous les éléments de E.

On suppose pour la suite que Φ est symétrique ou alternée.

Pour tout $x \in E$, on pose :

$$x^\perp = \{y \in E \text{ tel que } x \perp y = 0\} = \{y \in E \text{ tel que } \Phi(x,y) = 0\}$$

Plus généralement, si $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble non vide de E, on pose :

$$\mathcal{X}^\perp = \{y \in E \text{ tel que } x \perp y \text{ pour tout } x \in \mathcal{X}\}, = \{y \in E \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{X}\ \Phi(x,y) = 0\}$$

• y, z avec $y \perp x$ et $z \perp x$

alors $(y+z) \perp x$: $\Phi(y+z,x) = \underbrace{\Phi(y,x)}_{=0} + \underbrace{\Phi(z,x)}_{=0}$

$y \perp x \rightarrow 0$ $\quad$ $0 \leftarrow z \perp x$

ainsi $x^\perp = \{x\}^\perp$. On appelle $x^\perp$ (resp. $\mathcal{X}^\perp$) l'**orthogonal** de x (resp. de $\mathcal{X}$).

$\mathcal{X}$ n'est pas un sev en général

Proposition 2.7. *Soit $\mathcal{X}$ un sous-ensemble non vide de E. Alors $\mathcal{X}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E contenant* $\operatorname{Ker}\Phi$.

Démonstration. On montre facilement que $\mathcal{X}^\perp$ est un sous-espace vectoriel. Maintenant, on a

$$\mathcal{X}^\perp = \bigcap_{x \in \mathcal{X}} x^\perp.$$

Soit $y \in \operatorname{Ker}\Phi$ alors $\Phi(x,y) = 0 \ \forall x$ donc $\forall x$ $x \perp y$

C'est donc bien un sous-espace vectoriel puisque l'intersection d'un nombre quelconque (non nul) de sous-espaces vectoriels est toujours un sous-espace vectoriel. Le fait que $\mathcal{X}^\perp$ contienne $\operatorname{Ker}\Phi$ vient du fait que les éléments de $\operatorname{Ker}\Phi$ sont orthogonaux à n'importe quel élément de E par définition. $\square$

Les propriétés suivantes de l'orthogonal se montrent sans difficultés :

- Si $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, alors $\mathcal{Y}^\perp \subset \mathcal{X}^\perp$,
- $\boxed{\mathcal{X} \subset (\mathcal{X}^\perp)^\perp}$ $\rightarrow$ $x \in \mathcal{X}$ et $y \in \mathcal{X}^\perp$ alors $x \perp y$ donc $x \perp y$ $\forall y \in \mathcal{X}^\perp$ donc $x \in (\mathcal{X}^\perp)^\perp$

2.2.1 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'orthogonal $F^\perp$ de F (toujours par rapport à la forme bilinéaire fixée Φ) est un sous-espace vectoriel de E. Nous allons étudier les relations entre F et $F^\perp$. On a d'abord le premier résultat.

$\mathrm{Vec}(\mathcal{X})$ = le plus petit sev contenant $\mathcal{X}$

Proposition 2.8.

1. *Soit $\mathcal{X}$ une partie de E. On a* $\boxed{\mathcal{X}^\perp = \mathrm{Vec}(\mathcal{X})^\perp}$.
2. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a* $\boxed{(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp}$.
3. *Soit H un sous-espace vectoriel de E et soit $(h_1, \ldots, h_s)$ une famille génératrice de H. Alors, $x \in H^\perp$ si et seulement si $x \perp h_i$ pour $i = 1, \ldots, s$.*

Démonstration. On prouve le point 1. On a $\mathcal{X} \subset \mathrm{Vec}(\mathcal{X})$, d'où $\mathrm{Vec}(\mathcal{X})^\perp \subset \mathcal{X}^\perp$. Pour l'autre inclusion, soit $u \in \mathcal{X}^\perp$ et soit $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s \in \mathrm{Vec}(\mathcal{X})$ avec $x_1, \ldots, x_s \in \mathcal{X}$. On a

$$\Phi(x, u) = \lambda_1 \Phi(x_1, u) + \cdots + \lambda_s \Phi(x_s, u) = 0$$

et donc $\mathcal{X}^\perp \subset \mathrm{Vec}(\mathcal{X})^\perp$ ce qui achève la preuve de ce point.

montrer $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$

Pour le point 2, on a $F \subset F+G$ et donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp$. De même, on a $(F+G)^\perp \subset G^\perp$ et donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Pour l'inclusion inverse, on considère $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $a + b \in F + G$ avec $a \in F$ et $b \in G$. On calcule $\Phi(x, a+b) = \underbrace{\Phi(x,a)}_{=0 \text{ car } x \in F^\perp} + \underbrace{\Phi(x,b)}_{=0 \text{ car } x \in G^\perp} = 0$, donc $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$ et l'égalité est démontrée.

Finalement, pour le point 3, on voit directement que si $x \in H^\perp$ alors $x \perp h_i$ pour $i = 1, \ldots, s$. Réciproquement, supposons que $x \perp h_i$ pour $i = 1, \ldots, s$. Soit $y \in H$, alors il exists $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ tels que $y = \lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_s h_s$. On a donc

$$\Phi(x, y) = \lambda_1 \underbrace{\Phi(x, h_1)}_{=0 \text{ car } x \perp h_1} + \cdots + \lambda_s \underbrace{\Phi(x, h_s)}_{=0 \text{ car } x \perp h_i} = 0.$$

Il suit que $x \in H^\perp$ et le résultat est démontré. □