$\{y \in E : x \perp y \ \forall x \in \mathcal{X}\}$

Φ forme bilinéaire sym. (ou alternée)

Proposition 2.8.

1. *Soit $\mathcal{X}$ une partie de E. On a $\mathcal{X}^\perp = \mathrm{Vec}(\mathcal{X})^\perp$.*
2. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.*
3. *Soit H un sous-espace vectoriel de E et soit $(h_1, \ldots, h_s)$ une famille génératrice de H. Alors, $x \in H^\perp$ si et seulement si $x \perp h_i$ pour $i = 1, \ldots, s$.*

$x \perp y$ (par Φ) si $\Phi(x,y) = 0$

Démonstration. On prouve le point 1. On a $\mathcal{X} \subset \mathrm{Vec}(\mathcal{X})$, d'où $\mathrm{Vec}(\mathcal{X})^\perp \subset \mathcal{X}^\perp$. Pour l'autre inclusion, soit $u \in \mathcal{X}^\perp$ et soit $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s \in \mathrm{Vec}(\mathcal{X})$ avec $x_1, \ldots, x_s \in \mathcal{X}$. On a

$$\Phi(x,u) = \lambda_1 \Phi(x_1, u) + \cdots + \lambda_s \Phi(x_s, u) = 0$$

et donc $\mathcal{X}^\perp \subset \mathrm{Vec}(\mathcal{X})^\perp$ ce qui achève la preuve de ce point.

Pour le point 2, on a $F \subset F+G$ et donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp$. De même, on a $(F+G)^\perp \subset G^\perp$ et donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Pour l'inclusion inverse, on considère $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $a+b \in F+G$ avec $a \in F$ et $b \in G$. On calcule $\Phi(x, a+b) = \Phi(x,a) + \Phi(x,b) = 0$, donc $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$ et l'égalité est démontrée.

F sev

$F^\perp$ c'est aussi un sev

Finalement, pour le point 3, on voit directement que si $x \in H^\perp$ alors $x \perp h_i$ pour $i = 1, \ldots, s$. Réciproquement, supposons que $x \perp h_i$ pour $i = 1, \ldots, s$. Soit $y \in H$, alors il exists $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ tels que $y = \lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_s h_s$. On a donc

$$\Phi(x,y) = \lambda_1 \Phi(x, h_1) + \cdots + \lambda_s \Phi(x, h_s) = 0.$$

Il suit que $x \in H^\perp$ et le résultat est démontré. □

Rapport entre F et $F^\perp$?

$\Phi(A,B) = \mathrm{Tr}(AB)$ bilinéaire symétrique car $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

Exemple. Soit $E = M_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de type n et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On considère la forme bilinéaire symétrique $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par $\Phi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$. Soit $M_n^s(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques. On calcule $M_n^s(\mathbb{K})^\perp$. Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on note $M_{i,j}$ la matrice élémentaire dont le coefficient de la ligne i et colonne j est égal à 1 et tous les autres sont égaux à 0. Les matrices $M_{i,j}$, pour $1 \le i, j \le n$, forment une base de E et les matrices $M_{i,j} + M_{j,i}$ engendrent $M_n^s(\mathbb{K})$. Soit $A = (a_{i,j}) \in E$. On regarde à quelles conditions $A \perp (M_{i,j} + M_{j,i})$. On a

$$\mathrm{Tr}(A(M_{i,j} + M_{j,i})) = \mathrm{Tr}(AM_{i,j}) + \mathrm{Tr}(AM_{j,i}) = a_{i,j} + a_{j,i}$$

et donc $A \perp (M_{i,j} + M_{j,i})$ si et seulement si $a_{i,j} = -a_{j,i}$. Par la partie 2 de la proposition, il suit que $A \in M_n^s(\mathbb{K})^\perp$ si et seulement si on a $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tout $1 \le i, j \le n$. Donc l'orthogonal de $M_n^s(\mathbb{K})$ pour Φ est le sous-espace vectoriel des matrices alternées.

$\mathrm{Ker}\,\Phi$ = {vecteurs orthogonaux à tout}

Théorème 2.9. *On a*

$$\boxed{\dim F^\perp = \dim E - \dim F + \dim (F \cap \mathrm{Ker}\,\Phi)\,.}$$

$F \subset (F^\perp)^\perp$

En particulier, on a

$$\boxed{\dim F^\perp \ge \dim E - \dim F.}$$

De plus, si Φ est non dégénérée, on a $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

$\to \dim F + \dim F^\perp \geq \dim E$

Exemples. Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la forme bilinéaire :

$$\boxed{\Phi({}^t(x_1, x_2), {}^t(y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2.}$$

$\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0\}$

$$\boxed{D = \{ {}^t(\lambda,\lambda) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in \mathbb{R} \}}$$

Soit D la droite d'équation $v_1 = v_2$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Calculons son orthogonal. Les éléments de D sont les vecteurs de la forme $\boxed{{}^t(\lambda, \lambda)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc le vecteur ${}^t(y_1, y_2)$ est dans $D^\perp$ si et seulement si

si $\lambda \neq 0$

$$\Phi({}^t(\lambda, \lambda), {}^t(y_1, y_2)) = \lambda y_1 - \lambda y_2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Clairement, cette condition est équivalente à $y_1 = y_2$ et donc $\boxed{D^\perp = D}$.

$$\underbrace{\dim D^\perp}_{=1} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^2}_{=2} - \underbrace{\dim D}_{=1} + \underbrace{\dim(D \cap \ker \Phi)}_{=0}$$

Sur $\mathbb{R}^4$, on considère la forme bilinéaire :

$$\Psi({}^t(x_1, x_2, x_3, x_4), {}^t(y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1 y_1 - x_2 y_2.$$

On note F le plan défini par les équations :

dim. 2

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = 0, \\ \boxed{v_4 = 0.} \end{cases} \quad \leftarrow v_3 \text{ libre}$$

Ainsi, F est l'ensemble des vecteurs ${}^t(\lambda, \lambda, \mu, 0)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Maintenant, un vecteur ${}^t(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ est dans $F^\perp$ si et seulement si :

$$\Phi({}^t(\lambda, \lambda, \mu, 0), {}^t(y_1, y_2, y_3, y_4)) = \lambda(y_1 - y_2) = 0 \quad \Rightarrow y_1 = y_2$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Donc l'orthogonal $F^\perp$ de F est l'hyperplan défini par l'équation

$$\boxed{y_1 = y_2,}$$

$\forall x \in E$

$x = y + z$

dim. 3

$\rightarrow \dim = \dim E - 1$

$\quad 3 \qquad\quad 4 \qquad\quad 2$

avec $F^\perp$

$\dim F^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim F + \dim F \cap \operatorname{Ker} \Phi$

c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs ${}^t(\lambda, \lambda, \mu, \nu)$ avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Maintenant, il est facile de voir que l'orthogonal de $F^\perp$ est $F^\perp$ lui-même et donc $\boxed{F^{\perp\perp} \neq F}$. Notons que ceci implique que Φ est dégénérée par le théorème précédent, ce qui est facile à voir car, par exemple, ${}^t(0, 0, 1, 0)$ est dans le noyau de Φ.

Corollaire 2.10. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a $\boxed{E = F \oplus F^\perp}$ si et seulement si $F \cap F^\perp = \{0\}$.*

$F \cap F^\perp = \{0\}$

Démonstration. Supposons que $E = F \oplus F^\perp$. Alors, on a $F \cap F^\perp = \{0\}$ par définition. Réciproquement, supposons que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Il est facile de voir que $F \cap \operatorname{Ker} \Phi \subset F \cap F^\perp$ et donc $F \cap \operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$. Il suit par le théorème que $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ ce qui implique, avec $F \cap F^\perp = \{0\}$, que $E = F \oplus F^\perp$. □

$\dim E = \dim F + \dim F^\perp$

2.3 Formes quadratiques

$F \cap \operatorname{Ker} \Phi \subset F \cap F^\perp$

car $\operatorname{Ker} \Phi \subset F^\perp$

2.3.1 Premières définitions

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Une application de $q : E \to \mathbb{K}$ est une **forme quadratique** s'il existe une forme bilinéaire Φ sur E avec

$$\boxed{q(x) = \Phi(x, x)}$$

pour tout $x \in E$.

$q : E \to \mathbb{K}$

$\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$

On remarque qu'une forme quadratique *n'est pas* une application linéaire. En effet, pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

en général

$$q(x+y) \neq q(x) + q(y)$$

$$\boxed{q(\lambda x)} = \Phi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \Phi(x, x) = \boxed{\lambda^2 q(x).}$$

Notons que la forme quadratique q est nulle si et seulement si Φ est alternée.

$$\forall x \quad q(x) = 0 = \Phi(x, x)$$

On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E. On vérifie directement que $Q(E)$ est un sous-espace vectoriel.

Exemple. Posons $E = \mathbb{R}^2$ et

$$\Phi_1(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 - 2x_2 y_1$$

où $x = {}^t(x_1, x_2)$ et $y = {}^t(y_1, y_2)$ sont deux vecteurs de E. La forme quadratique correspondante est

$$q(x) = \Phi_1(x, x) = x_1 x_1 + x_1 x_2 - 2x_2 x_1 = x_1^2 - x_1 x_2.$$

$$q(x) = x_1 x_1 - x_1 x_2 = x_1^2 - x_1 x_2$$

Notons que la forme bilinéaire

$$\Phi_2(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2$$

définit la même forme quadratique.

Comme remarqué dans l'exemple précédent, plusieurs formes bilinéaires différentes peuvent définir la même forme quadratique. Cependant, on peut associer à chaque forme quadratique une *unique* forme bilinéaire *symétrique.*

$$\mathrm{Sym}_2(E) \longrightarrow Q(E)$$

$\Phi \longmapsto q(x) = \Phi(x,x)$

$Q \longleftarrow q$

Proposition 2.11. *L'espace vectoriel $Q(E)$ est isomorphe à $\mathrm{Sym}_2(E)$, l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E, par l'application qui associe à une forme quadratique q la forme bilinéaire symétrique, appelée* ***forme polaire*** *de q, et définie par*

$$\boxed{Q(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right).}$$

noyau

$d : \mathrm{Sym}_2 \oplus \cancel{\mathrm{Alt}_2} \to Q(E)$

Démonstration. On considère l'application $d : L_2(E) \to Q(E)$ qui associe à une forme bilinéaire Φ la forme quadratique $q(x) = \Phi(x,x)$. On vérifie directement que c'est une application linéaire. Elle est surjective par définition. Son noyau est clairement le sous-espace vectoriel $\mathrm{Alt}_2(E)$ des formes bilinéaires alternées. Puisque $L_2(E) = \mathrm{Sym}_2(E) \oplus \mathrm{Alt}_2(E)$, on en déduit que la restriction de d à $\mathrm{Sym}_2(E)$ est un isomorphisme. Cela montre qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique Q associée à q. Pour trouver l'expression de Q, on calcule

$$\begin{aligned} q(x+y) = Q(x+y, x+y) &= \underbrace{Q(x,x)}_{q(x)} + \underbrace{Q(x,y) + Q(y,x)}_{=} + \underbrace{Q(y,y)}_{q(y)} \\ &= q(x) + 2Q(x,y) + q(y). \end{aligned}$$

Q symétrique

□

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit Φ une forme bilinéaire (arbitraire) telle que $q(x) = \Phi(x,x)$ et A la matrice de Φ sur la base $\mathcal{B}$. On a donc

$$\boxed{q(x) = {}^tXAX.}$$

$\Phi(x,y) = {}^tXAY$

$X \leftrightarrow x$ sur $\mathcal{B}$

$Y \leftrightarrow y$ sur $\mathcal{B}$

formule matricielle des formes

quadratiques

On calcule

$$
\begin{aligned}
Q(x,y) &= \tfrac{1}{2}\left[{}^t(X+Y)A(X+Y) - {}^tXAX - {}^tYAY\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\left[({}^tX + {}^tY)A(X+Y) - {}^tXAX - {}^tYAY\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\left[{}^tX\cancel{AX} + {}^tXAY + {}^tYAX + {}^tY\cancel{AY} - {}^tX\cancel{AX} - {}^tY\cancel{AY}\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\left[{}^tXAY + {}^tYAX\right].
\end{aligned}
$$

^tYAX ^tY A X

$= (\cdots)\begin{pmatrix} \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

$= (\cdots)\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

$= (\cdot)$

Notons que ${}^tXAY$ et ${}^tYAX$ sont en fait des matrices de type 1, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$. En particulier, on a ${}^tYAX = {}^t({}^tYAX) = {}^tX{}^tAY$, et ainsi

$$Q(x,y) = {}^tX\tfrac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)Y.$$

Donc la matrice de Q est $\frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)$. La **matrice** de q sur une base $\mathcal{B}$ de E est par définition la matrice de la forme bilinéaire Q sur $\mathcal{B}$. Ainsi, cette matrice est *toujours* symétrique.

base canonique de $\mathbb{R}^2$

Exemple. La forme polaire Q de la forme quadratique q définie dans l'exemple précédent peut être calculée en utilisant la méthode donnée dans la preuve ci-dessus. On calcule la matrice A_1 de la forme bilinéaire Φ_1 définissant q, on trouve

$\Phi_1(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice B de la forme polaire Q est donnée par

$$B = \tfrac{1}{2}\left(A_1 + {}^tA_1\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

matrice de q

$$\Phi_2(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi on trouve

$$Q(x,y) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 - \tfrac{1}{2}x_1y_2 - \tfrac{1}{2}x_2y_1.$$

$$\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve évidemment la même expression si on part de la forme bilinéaire Φ_2 puisqu'elle définit aussi q.

Une autre manière de calculer la forme polaire à partir de l'expression de la forme quadratique q est d'utiliser la règle suivante : on remplace dans l'expression les termes de la forme λx_i^2 (termes carrés) par $\lambda x_i y_i$ et les termes de la forme $\mu x_i x_j$ avec $i \neq j$ (termes rectangles) par $\frac{1}{2}\mu(x_iy_j + x_jy_i)$. Ainsi dans l'expression

$$\boxed{q(x) = x_1^2 - x_1x_2,}$$

le terme x_1^2 devient x_1y_1 et le terme $-x_1x_2$ devient $-\frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1$.

$$x_1^2 \to x_1y_1$$
$$-x_1x_2 \to -\frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1$$

On appelle **espace quadratique** un couple (E, q) formée d'un espace vectoriel E (de dimension finie) et d'une forme quadratique q sur E.

2.3.2 Autres invariants d'une forme quadratique

On définit le **noyau** et le **rang** de q comme le noyau et le rang de Q. La forme quadratique q est **dégénérée** si $\operatorname{Ker} q \neq \{0\}$, sinon q est **non dégénérée** (ou **régulière**). Un vecteur x est dit **isotrope** si $q(x) = 0$. Si la forme quadratique q admet un vecteur isotrope *non*

si $\operatorname{Ker} q = \{0\}$ ssi q est non dégénérée

$x \in \operatorname{Ker} q : \mathcal{Q}(x,y) = 0 \ \forall y \underset{y=x}{\Rightarrow} \mathcal{Q}(x,x) = 0 \Rightarrow x \in C(q)$

$q(x) = \mathcal{Q}(x,x) = 0$

nul, on dit que q est **isotrope**. L'ensemble $C(q)$ formé des vecteurs isotropes de q est le **cône isotrope** de q. En général, ce n'est *pas* un sous-espace vectoriel (mais c'est un cône, c'est-à-dire stable par multiplication par un élément de $\mathbb{K}$). Il contient toujours le noyau de q.

$C(q) = \{x \in E : q(x) = 0\}$

Exemple. Soit $q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 = 2x_1(x_1 + x_2)$. La matrice de q (sur la base canonique) est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Puisqu'elle est de déterminant non nul, on a $\operatorname{Ker} q = \{0\}$. D'un autre côté, on voit que q est isotrope puisque les vecteurs ${}^t(0,1)$ et ${}^t(1,-1)$ sont isotropes pour q. (Remarque : le vecteur ${}^t(0,1) + {}^t(1,-1) = {}^t(1,0)$ n'est pas isotrope.)

si $x \in C(q)$ alors $\lambda x \in C(q)$ $\forall \lambda$

2.4 Réduction des formes quadratiques

2.4.1 Bases duales et contraduales

$\xi_1, \dots, \xi_n$

On rappelle que E^*, appelé espace dual de E, est l'espace des formes linéaires de E. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Les **formes coordonnées** $\xi_1, \dots, \xi_n$ pour la base $\mathcal{B}$ sont les éléments de E^* définies de la manière suivante : pour tout $x \in E$, on peut écrire de manière unique

$f : E \to \mathbb{K}$ linéaire

$$\boxed{x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n}$$

$\xi_1(x) = \lambda_1$ $\xi_n(x) = \lambda_n$