$M_n(\mathbb{K})$ = matrices $n \times n$ à coeff. dans $\mathbb{K}$

$\Phi(A,B) = \mathrm{Tr}(AB)$ bilinéaire sym.

$M_n^s(\mathbb{K})$ = matrices symétriques : ${}^tM = M$

Calculer $M_n^s(\mathbb{K})^\perp$: orthogonal de $M_n^s(\mathbb{K})$

Famille génératrice de $M_n^s(\mathbb{K})^\perp$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} j & i \end{array} \\ \begin{array}{c} i \rightarrow \\ j \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$M_{ij} =$ 0 partout sauf 1 en position (i,j)
et en position (j,i)

La famille $(M_{ij})_{i,j}$ engendre $M_n^s(\mathbb{K})$

Rappel : $A \in M_n^s(\mathbb{K})^\perp$ ssi $A \perp M_{ij}$ $\forall i,j$

On a

$$\Phi(A, M_{ij}) = \begin{cases} a_{ii} & \text{si } i = j \\ a_{ij} + a_{ji} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$A = (a_{ij})$

On veut $\Phi(A, n_{ij}) = 0 \quad \forall_{i,j}$

$(A \perp n_{ij})$

donc $a_{ii} = 0 \quad \forall i$

$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall_{i,j}$ inclus $(j=i)$

donc $^tA = -A$ $\quad A$ | anti-symétrique / alternée

Conclusion :

$\mathcal{M}_n^s(\mathbb{K})^\perp = \{$ matrices anti-symétriques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\}$

$q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2$ forme quadratique

$\varphi(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1$ forme polaire

Matrice de q $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (symétrique)

$\det(A) = 2 \times 0 - 1 \times 1 = -1 \neq 0$

φ et q non dégénérées

Cône isotrope : $q(x) = 0 \iff 2x_1^2 + 2x_1x_2 = 0$

$\iff 2x_1(x_1 + x_2) = 0$

$\iff x_1 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$

$$C(q) = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}}_{\text{sev}} \cup \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}}_{\text{sev}}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont isotropes

mais leur somme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas isotrope

$q\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \times 1^2 + 2 \times 1 \times 0 = 2$