nul, on dit que q est **isotrope**. L'ensemble $C(q)$ formé des vecteurs isotropes de q est le **cône isotrope** de q. En général, ce n'est *pas* un sous-espace vectoriel (mais c'est un cône, c'est-à-dire stable par multiplication par un élément de $\mathbb{K}$). Il contient toujours le noyau de q.

Exemple. Soit $q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 = 2x_1(x_1 + x_2)$. La matrice de q (sur la base canonique) est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Puisqu'elle est de déterminant non nul, on a $\operatorname{Ker} q = \{0\}$. D'un autre côté, on voit que q est isotrope puisque les vecteurs ${}^t(0,1)$ et ${}^t(1,-1)$ sont isotropes pour q. (Remarque : le vecteur ${}^t(0,1) + {}^t(1,-1) = {}^t(1,0)$ n'est pas isotrope.)

2.4 Réduction des formes quadratiques

2.4.1 Bases duales et contraduales

On rappelle que E^*, appelé espace dual de E, est l'espace des formes linéaires de E. Soit $\boxed{\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)}$ une base de E. Les **formes coordonnées** $\xi_1, \ldots, \xi_n$ pour la base $\mathcal{B}$ sont les éléments de E^* définies de la manière suivante : pour tout $x \in E$, on peut écrire de manière unique

$$\boxed{x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n}$$

$\lambda_i e_i$

$\xi : \underset{E}{x} \longmapsto \underset{\mathbb{K}}{\lambda}$

linéaire

$e_j = 0 \times e_1 + \cdots + 1 \times e_j + \cdots + 0 \times e_n$

$\xi_1, \ldots, \xi_n \in E^*$

et on pose pour $1 \leq i \leq n$:

$$\boxed{\xi_i(x) = \lambda_i.}$$

On a donc

$$x = \xi_1(x)e_1 + \cdots + \xi_n(x)e_n.$$

Les formes coordonnées vérifient les équations

$$\boxed{\xi_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

formes coordonnées pour $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$

définit totalement $\xi_1, \ldots, \xi_n$

Exemple. On pose $E = \mathbb{R}^3$ et on considère la base (e_1, e_2, e_3) avec

$$\boxed{e_1 = {}^t(1, 0, -1),} \quad e_2 = {}^t(0, 2, 1), \quad e_3 = {}^t(0, 0, 1).$$

f forme linéaire

$f(x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$

On calcule la forme ξ_1. Pour $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$, comme ξ_1 est une forme linéaire, elle est de la forme $\xi_1(x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ à déterminer. On doit avoir

$$\begin{cases} \xi_1(e_1) = 1 \\ \xi_1(e_2) = 0 \\ \xi_1(e_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On a donc $\xi_1(x) = x_1$. On trouve de même $\xi_2(x) = \frac{1}{2}x_2$ et $\xi_3(x) = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3$.

Proposition 2.12. *La famille $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est une base de E^*. On l'appelle la* ***base duale*** *de $\mathcal{B}$ et on la note $\mathcal{B}^*$.*

$E \longleftrightarrow E^*$

$\mathcal{B} \longleftrightarrow \mathcal{B}^*$

Démonstration. Montrons que c'est une famille libre de E^*. Soit une combinaison

$$\lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_n\xi_n = 0_{E^*}$$

$0_{E^*} : x \mapsto 0$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. La relation précédente signifie que

$$\lambda_1\xi_1(x) + \cdots + \lambda_n\xi_n(x) = 0$$

$\xi_j(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

pour tout $x \in E$. Maintenant, pour $1 \leq i \leq n$, on trouve

$$\lambda_1\xi_1(e_i) + \cdots + \lambda_n\xi_n(e_i) = \lambda_i = 0,$$

et donc tous les coefficients de la relation sont nuls, ce qui prouve que la famille est libre.

Montrons à présent que cette famille est génératrice. Soit f un élément de E^*. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on pose

$$\mu_i = f(e_i) \in \mathbb{K}$$

$f(x) = \mu_1 \xi_1(x) + \cdots + \mu_n \xi_n(x)$ (cf. famille)

et on vérifie directement que

$$f = \mu_1\xi_1 + \cdots + \mu_n\xi_n. \quad \square$$

Proposition 2.13. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. Soient $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{C}^*$ les bases duales correspondantes. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Alors, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}^*$ à la base $\mathcal{C}^*$ est ${}^tP^{-1}$.*

$\mathcal{B} \xrightarrow{P} \mathcal{C}$ bases de E

$\mathcal{B}^* \xrightarrow{{}^tP^{-1}} \mathcal{C}^*$ bases de E^*

Démonstration. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{C} = (e'_1, \ldots, e'_n)$, $\mathcal{B}^* = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Par définition, on a pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$

dual

$$e'_j = p_{1,j} e_1 + \cdots + p_{n,j} e_n$$

$E \longrightarrow E^*$

où $P = (p_{i,j})$. Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit

$\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}^*$

$$\chi_j = q_{1,j} \xi_1 + \cdots + q_{n,j} \xi_n$$

où ${}^tP^{-1} = (q_{i,j})$. On calcule

$$\chi_i(e'_j) = \sum_{k=1}^n q_{k,i} \xi_k(e'_j) = \sum_{k=1}^n q_{k,i} \sum_{l=1}^n p_{l,j} \xi_k(e_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{k,i} p_{l,j} \xi_k(e_l) = \sum_{k=1}^n q_{k,i} p_{k,j}.$$

$\mathcal{B} \dashleftarrow \mathcal{F}$

Et ainsi on obtient $\chi_i(f_j) = \delta_{i,j}$ donc la base $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ est la base duale de $\mathcal{C}$ ce qui prouve le résultat. $\square$

avec $\mathcal{B}^* = \mathcal{F}$

Corollaire 2.14. *Soit $\mathcal{F}$ une base de E^*. Alors il existe une unique base $\mathcal{B}$ de E telle que la base $\mathcal{F}$ est la base duale de $\mathcal{B}$. La base $\mathcal{B}$ s'appelle la* ***base contraduale*** *de $\mathcal{F}$.*

!

Démonstration. On note $\mathcal{C}$ une base quelconque de E et $\mathcal{C}^*$ sa base duale. On note M la matrice de passage de la base $\mathcal{C}^*$ à la base $\mathcal{F}$. Alors, la base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ est ${}^tM^{-1}$ est la base contraduale de $\mathcal{F}$. $\square$

Exemple. On pose $E = \mathbb{R}^3$. On considère la base (f_1, f_2, f_3) de E^* avec

$$f_1(x) = x_1 - x_2 \quad f_2(x) = -x_3, \quad f_3(x) = x_1 + x_2 + x_3.$$

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On calcule la base contraduale (e_1, e_2, e_3). On pose $e_1 = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ avec $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ à déterminer. On doit avoir

$$\begin{cases} f_1(e_1) = 1 \\ f_2(e_1) = 0 \\ f_3(e_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = -1/2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Sym.

On a donc $e_1 = {}^t\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$. On trouve de même $e_2 = {}^t\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$ et $e_3 = {}^t\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

$Q(x,x) = q(x)$

2.4.2 Formulations du problème

Soit q une forme quadratique sur E. Notons Q sa forme polaire. Le problème de la **réduction** de q est de trouver une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de q, c'est-à-dire par définition la matrice de Q, est *diagonale*. Dans une telle base, on a alors

$$Q(e_i, e_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j,$$

Q $\quad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(Q) = (Q(e_i, e_j))$

c'est-à-dire $e_i \perp e_j$ si $i \neq j$. On dit que la base $\mathcal{B}$ est **orthogonale** (relativement à q).

Exemple. La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est orthogonale pour la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

En terme de matrices, notons A la matrice de q par rapport à une base fixée $\mathcal{C}$ de E. Réduire q revient à chercher une matrice P inversible telle que la matrice

$${}^tPAP$$

$\leftarrow$ matrice de q sur $\mathcal{B}$ avec

$q(x) = \sum \alpha_{ij} x_i x_j$ | P matrice de changement de base de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$

est diagonale. La matrice P est alors la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à une base orthogonale pour q.

Finalement, en termes algébriques, réduire q revient à trouver une base dans laquelle l'expression de q sous la forme

$x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$

$$\boxed{q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.}$$

Réduire q revient aussi à décomposer ~~le polynôme quadratique homogène $P(x_1, \ldots, x_n)$~~ représentant q par rapport à une base fixée $\mathcal{C}$ en une somme de formes linéaires indépendantes de carrés

$$q(x) = \cancel{P(x_1, \ldots, x_n)} = \lambda_1 f_1(x_1, \ldots, x_n)^2 + \cdots + \lambda_n f_n(x_1, \ldots, x_n)^2.$$

Dans ce cas, on dit que la forme q est **décomposée en somme de carrées de formes linéaires indépendantes** ou juste **décomposée**.

Proposition 2.15. *Soit q une forme quadratique et soient $f_1, \ldots, f_n$ des formes linéaires indépendantes telles que*

$$q(x) = \lambda_1 f_1(x)^2 + \cdots + \lambda_n f_n(x)^2.$$

Alors, la base contraduale de la base $(f_1, \ldots, f_n)$ de E^* est une base orthogonale pour q.

Démonstration. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ les vecteurs de la base contraduale de la base $(f_1, \ldots, f_n)$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $q(e_i) = \lambda_i$. Maintenant, pour $i \neq j$, on a

$$Q(e_i, e_j) = \frac{1}{2}[q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j)] = \frac{1}{2}[\lambda_i + \lambda_j - \lambda_i - \lambda_j] = 0. \qquad \square$$

$i \neq j$

$$q(e_i) = \lambda_1 f_1(e_i)^2 + \dots + \lambda_n f_n(e_i)^2 = \lambda_i f_i(e_i)^2 = \lambda_i$$

Théorème 2.16. *Toute forme quadratique admet une base orthogonale.*

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur la dimension de E. Supposons que $\dim E = 1$. Alors toute base de E est orthogonale pour q et le résultat est démontré.

Supposons à présent que le résultat est démontré pour la dimension m avec $m \geq 1$ fixé. On considère q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension $m+1$. On note Q la forme polaire associée à q. Si q est la forme quadratique nulle, c'est-à-dire $q(x) = 0$ pour tout $x \in E$, alors toutes les bases de E sont orthogonales pour q. Sinon, il existe un vecteur $a \in E$ tel que $q(a) \neq 0$. On pose H le sous-espace vectoriel engendré par a et $H^\perp$ l'orthogonal de H par rapport à Q. Le sous-espace vectoriel H est non isotrope car sinon il existe un élément b non nul dans $H \cap H^\perp$, d'où $b = \lambda a$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ et $Q(a,b) = \lambda Q(a,a) = 0$, ainsi $q(a) = 0$, contradiction. Donc H est non isotrope et il suit par le Corollaire 2.10 que $E = H \oplus H^\perp$. Maintenant, notons p la restriction de q à $H^\perp$ et P la forme polaire de p. En fait, il est facile de voir que P est la restriction de Q à $H^\perp \times H^\perp$. Puisque $\dim H^\perp = \dim E - \dim H = m$, l'hypothèse de récurrence implique qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_m)$ de $H^\perp$ orthogonale pour p. Alors, $\mathcal{B} = (a, e_1, \dots, e_m)$ est une base orthogonale de E. En effet, $\mathcal{B}$ est une base de E car c'est l'union d'une base de H et de $H^\perp$. Puis on a $Q(e_i, e_j) = P(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$, et de plus $Q(a, e_i) = 0$ pour tout i puisque $a \in H$ et $e_i \in H^\perp$. Donc $\mathcal{B}$ est bien une base orthogonale pour q et le résultat est démontré pour la dimension $m+1$. □

base orth. de E

x_1 avec $q(x_1) \neq 0$

$E = x_1 \oplus H_1$

avec $H_1 = x_1^\perp$

base orth. de H_1

et on recommence !

$x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_4 = f_1(x)^2 + ($sans $x_1)$

2.4.3 Réduction de Gauss

$x_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$

L'algorithme suivant, inventé par Gauss, permet de décomposer n'importe quel polynôme quadratique homogène en somme de carrés de formes linéaires indépendantes. Nous commençons par expliquer cette méthode sur deux exemples.

Exemples. On considère le polynôme quadratique homogène

$$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 14x_2x_4 + 5x_3^2 - 8x_3x_4 + 10x_4^2.$$

On commence par travailler avec les termes carrés, par exemple le terme x_1^2. On va compléter le carré commençant par x_1^2. Pour cela on commence par mettre $2x_1$ en facteur

$$q(x) = x_1^2 + 2x_1(-x_2 + 2x_3 - x_4) + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 14x_2x_4 + 5x_3^2 - 8x_3x_4 + 10x_4^2$$

et on utilise la formule suivante

$$\begin{aligned}(a_1 + \cdots + a_k)^2 &= (\text{somme des carrés}) + \boxed{2}(\text{somme des doubles produits}) \\ &= a_1^2 + \cdots + a_k^2 + 2a_1a_2 + \cdots + 2a_1a_k + 2a_2a_3 + \cdots + 2a_{k-1}a_k.\end{aligned}$$

Ainsi les termes $x_1^2 + 2x_1(-x_2 + 2x_3 - x_4)$ forment le début du développement de

$$(x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4.$$

De surcroît, les termes manquant ne font plus intervenir x_1 et donc si on remplace, on obtient

$$q(x) = \underbrace{(x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2}_{\text{réduit}} + \underbrace{\boxed{4x_2^2} + 4x_2x_3 + 12x_2x_4 + x_3^2 - 4x_3x_4 + 9x_4^2}_{\text{plus de } x_1 \,!},$$

non réduit

c'est-à-dire une expression de q sous la forme d'une somme entre le carré d'une forme linéaire $f_1(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$, plus un polynôme quadratique homogène qui ne fait plus intervenir la variable x_1.

$x^2 + 2xa$
$= (x+a)^2 - a^2$

On continue le procédé avec la variable x_2. On écrit

a

$$q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4\left(x_2^2 + 2x_2(-\tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{3}{2}x_4)\right) + x_3^2 - 4x_3x_4 + 9x_4^2,$$

et donc on a fait apparaître le début de

$$(x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{3}{2}x_4)^2 = x_2^2 + \tfrac{1}{4}x_3^2 + \tfrac{9}{4}x_4^2 - x_2x_3 + 3x_2x_4 - \tfrac{3}{2}x_3x_4.$$

En remplaçant dans l'expression de q, on trouve

$$q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4(x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{3}{2}x_4)^2 + 2x_3x_4.$$

sans x_1 ni x_2

On ne peut plus à présent appliquer la même méthode puisqu'il n'y a plus de carrés dans la partie à réduire. Dans ce cas, on utilise l'identité suivante

$$\boxed{ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right],}$$

$f_1(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$

$\vdots$

$f_4(x) = x_3 + x_4$

ce qui nous donne finalement

$$\boxed{q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4(x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{3}{2}x_4)^2 + \tfrac{1}{2}(x_3 - x_4)^2 - \tfrac{1}{2}(x_3 + x_4)^2.}$$

On peut vérifier sans difficultés que les formes linéaires de cette décomposition sont bien indépendantes.

$$ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$$

Considérons à présent le polynôme quadratique homogène

$$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + 3x_2x_4 + 9x_3x_4.$$

Il faut utiliser la deuxième technique puisqu'il n'y a pas de termes carrés. Cependant, ici la situation est moins simple que dans le cas précédent puisqu'il ne suffit pas d'appliquer la formule donnée ci-dessus pour faire "disparaître" les variables. On procède de la manière suivante : on choisit deux variables, par exemple les variables x_1 et x_2. On groupe les termes en écrivant le terme en x_1x_2 puis les termes où ces variables interviennent en factorisant x_1 et x_2

$$q(x) = x_1x_2 + x_1(2x_3 - x_4) + x_2(x_3 + 3x_4) + 9x_3x_4.$$

On utilise à présent l'identité

a $\quad$ b

$$\boxed{uv + ua + vb = (u+b)(v+a) - ab}$$

$u = x_1$

$v = x_2$

et on déduit

$$x_1x_2 + x_1(2x_3 - x_4) + x_2(x_3 + 3x_4) = (x_1 + x_3 + 3x_4)(x_2 + 2x_3 - x_4) - (2x_3 - x_4)(x_3 + 3x_4).$$

On remplace et on simplifie pour obtenir

$$q(x) = (x_1 + x_3 + 3x_4)(x_2 + 2x_3 - x_4) - 2x_3^2 + 4x_3x_4 + 3x_4^2$$

plus de x_1, ni x_2

et on utilise la formule donnée ci-dessus

$$\boxed{q(x) = \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4)^2 - 2x_3^2 + 4x_3x_4 + 3x_4^2}$$

réduit

On termine la réduction en utilisant la première méthode. Les termes $-2x_3^2+4x_3x_4$ forment le début de

$$-2(x_3-x_4)^2 = -2x_3^2+4x_3x_4-2x_4^2.$$

On remplace et on obtient l'expression :

$$q(x) = \tfrac{1}{4}(x_1+x_2+3x_3+2x_4)^2 - \tfrac{1}{4}(x_1-x_2-x_3+4x_4)^2 - 2(x_3-x_4)^2 + 5x_4^2.$$

Pour un polynôme quadratique donné, la réduction de Gauss consiste donc à utiliser plusieurs fois l'une ou l'autre des deux techniques suivantes jusqu'à ce que la réduction soit terminée

- S'il existe un terme x_i^2 dans l'expression, par exemple x_1^2, on écrit le polynôme sous la forme

$$q(x_1,\dots,x_n) = \lambda x_1^2 + x_1 f(x_2,\dots,x_n) + q'(x_2,\dots,x_n)$$

avec $\lambda \neq 0$, f une forme linéaire et q' un polynôme quadratique homogène. Puis on fait les transformations suivantes

$$\begin{aligned} q(x_1,\dots,x_n) &= \lambda\left[x_1^2 + x_1\frac{f(x_2,\dots,x_n)}{\lambda}\right] + q'(x_2,\dots,x_n) \\ &= \lambda\left[x_1 + \frac{f(x_2,\dots,x_n)}{2\lambda}\right]^2 + q'(x_2,\dots,x_n) - \frac{f(x_2,\dots,x_n)^2}{4\lambda} \end{aligned}$$

On pose

$$s(x_2,\dots,x_n) = q'(x_2,\dots,x_n) - \frac{f(x_2,\dots,x_n)^2}{4\lambda}$$

et on est ramené à la réduction du polynôme quadratique homogène s qui comporte une variable de moins.

- S'il n'y a pas de termes carrés, on sélectionne un terme en $x_i x_j$ avec $i \neq j$, par exemple $x_1 x_2$, et on met q sous la forme

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \lambda x_1 x_2 + x_1 f(x_3, \ldots, x_n) + x_2 g(x_3, \ldots, x_n) + q'(x_3, \ldots, x_n)$$

où $\lambda \neq 0$, f et g sont des formes linéaires et q' est un polynôme quadratique homogène. Puis, on fait les transformations suivantes

$$\begin{aligned} q(x_1, \ldots, x_n) &= \lambda \left[x_1 x_2 + x_1 \frac{f(x_3, \ldots, x_n)}{\lambda} + x_2 \frac{g(x_3, \ldots, x_n)}{\lambda} \right] + q'(x_3, \ldots, x_n) \\ &= \lambda \left[\left(x_1 + \frac{g}{\lambda} \right) \left(x_2 + \frac{f}{\lambda} \right) \right] + q' - \frac{fg}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{4} \left[\left(x_1 + x_2 + \frac{f+g}{\lambda} \right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{g-f}{\lambda} \right)^2 \right] + s \end{aligned}$$

où $s = q' - fg/\lambda$ est un polynôme quadratique homogène avec deux variables de moins que s.

La validité de l'algorithme est assurée par le théorème suivant.

Théorème 2.17. *L'algorithme de Gauss calcule une décomposition en somme de carrées de formes linéaires indépendantes.*

Démonstration. On procède par récurrence sur le nombre de variables. S'il y a une seule variable, alors le résultat est démontré puisque dans ce cas tout polynôme quadratique homogène est de la forme λx_1^2. Maintenant, soit $n \geq 1$. Supposons que la méthode de Gauss appliquée à un polynôme quadratique homogène avec *au plus* n variables renvoie bien une décomposition en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

On considère un polynôme quadratique homogène q en $n+1$ variables. On suppose q non nul car sinon le résultat est évident. Supposons que l'on se trouve dans le premier cas, c'est-à-dire q contient un terme en x_i^2, par exemple x_1^2. Alors on calcule une décomposition

$$q(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \lambda t(x_1, \ldots, x_{n+1})^2 + s(x_2, \ldots, x_{n+1})$$

avec t une forme linéaire et s un polynôme quadratique homogène. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut décomposer s en somme de formes linéaires indépendantes $f_1, \ldots, f_n$ ne faisant intervenir que les variables $x_2, \ldots, x_{n+1}$. Maintenant, en regardant l'expression de t_1 donnée par la méthode, on trouve que la matrice de la famille $(t, f_1, \ldots, f_n)$ sur les variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où A est la matrice de la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ sur les variables $x_2, \ldots, x_{n+1}$. En particulier, le déterminant de M est égal au déterminant de A qui est non nul puisque les $f_1, \ldots, f_n$ sont indépendantes. Donc les formes linéaires de la décomposition de q sont indépendantes.

De même, dans le deuxième cas, on a une décomposition de la forme

$$q(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \lambda \left[t_1(x_1, \ldots, x_{n+1})^2 - t_2(x_1, \ldots, x_{n+1})^2 \right] + s(x_3, \ldots, x_{n+1}).$$

L'hypothèse de récurrence affirme qu'on peut décomposer s en somme de formes linéaires indépendantes $f_1, \ldots, f_{n-1}$ ne faisant intervenir que les variables $x_3, \ldots, x_{n+1}$. Les formes particulières de t_1 et t_2 donnent que la matrice de la famille $(t_1, t_2, f_1, \ldots, f_{n-1})$ sur les variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * & \cdots & * \\ 1 & -1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

où A est la matrice de la famille $(f_1, \ldots, f_{n-1})$ sur les variables $x_3, \ldots, x_{n+1}$. En particulier, le déterminant de M est égal $-2 \det A$ qui est non nul puisque les $f_1, \ldots, f_{n-1}$ sont indépendantes. Donc les formes linéaires de la décomposition de q sont indépendantes. $\square$

2.4.4 Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

Deux formes quadratiques sur un espace vectoriel E sont dites **équivalentes** si ils existent des bases de E sur lesquelles elles ont la même matrice.