et on est ramené à la réduction du polynôme quadratique homogène $s$ qui comporte une variable de moins.

- S'il n'y a pas de termes carrés, on sélectionne un terme en $x_i x_j$ avec $i \neq j$, par exemple $x_1 x_2$, et on met $q$ sous la forme

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \lambda x_1 x_2 + x_1 f(x_3, \ldots, x_n) + x_2 g(x_3, \ldots, x_n) + q'(x_3, \ldots, x_n)$$

où $\lambda \neq 0$, $f$ et $g$ sont des formes linéaires et $q'$ est un polynôme quadratique homogène. Puis, on fait les transformations suivantes

$$\begin{aligned} q(x_1, \ldots, x_n) &= \lambda \left[ x_1 x_2 + x_1 \frac{f(x_3, \ldots, x_n)}{\lambda} + x_2 \frac{g(x_3, \ldots, x_n)}{\lambda} \right] + q'(x_3, \ldots, x_n) \\ &= \lambda \left[ \left( x_1 + \frac{g}{\lambda} \right) \left( x_2 + \frac{f}{\lambda} \right) \right] + q' - \frac{fg}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{4} \left[ \left( x_1 + x_2 + \frac{f+g}{\lambda} \right)^2 - \left( x_1 - x_2 + \frac{g-f}{\lambda} \right)^2 \right] + s \end{aligned}$$

où $s = q' - fg/\lambda$ est un polynôme quadratique homogène avec deux variables de moins que $s$.

La validité de l'algorithme est assurée par le théorème suivant.

**Théorème 2.17.** *L'algorithme de Gauss calcule une décomposition en somme de carrées de formes linéaires indépendantes.*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur le nombre de variables. S'il y a une seule variable, alors le résultat est démontré puisque dans ce cas tout polynôme quadratique homogène est de la forme $\lambda x_1^2$. Maintenant, soit $n \geq 1$. Supposons que la méthode de Gauss appliquée à un polynôme quadratique homogène avec *au plus* $n$ variables renvoie bien une décomposition en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

On considère un polynôme quadratique homogène $q$ en $n+1$ variables. On suppose $q$ non nul car sinon le résultat est évident. Supposons que l'on se trouve dans le premier cas, c'est-à-dire $q$ contient un terme en $x_i^2$, par exemple $x_1^2$. Alors on calcule une décomposition

$$q(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \lambda t(x_1, \ldots, x_{n+1})^2 + s(x_2, \ldots, x_{n+1})$$

avec $t$ une forme linéaire et $s$ un polynôme quadratique homogène. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut décomposer $s$ en somme de formes linéaires indépendantes $f_1, \ldots, f_n$ ne faisant intervenir que les variables $x_2, \ldots, x_{n+1}$. Maintenant, en regardant l'expression de $t_1$ donnée par la méthode, on trouve que la matrice de la famille $(t, f_1, \ldots, f_n)$ sur les variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $A$ est la matrice de la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ sur les variables $x_2, \ldots, x_{n+1}$. En particulier, le déterminant de $M$ est égal au déterminant de $A$ qui est non nul puisque les $f_1, \ldots, f_n$ sont indépendantes. Donc les formes linéaires de la décomposition de $q$ sont indépendantes.

De même, dans le deuxième cas, on a une décomposition de la forme

$$q(x_1, \dots, x_{n+1}) = \lambda \left[ t_1(x_1, \dots, x_{n+1})^2 - t_2(x_1, \dots, x_{n+1})^2 \right] + s(x_3, \dots, x_{n+1}).$$

L'hypothèse de récurrence affirme qu'on peut décomposer $s$ en somme de formes linéaires indépendantes $f_1, \dots, f_{n-1}$ ne faisant intervenir que les variables $x_3, \dots, x_{n+1}$. Les formes particulières de $t_1$ et $t_2$ donnent que la matrice de la famille $(t_1, t_2, f_1, \dots, f_{n-1})$ sur les variables $x_1, \dots, x_{n+1}$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * & \cdots & * \\ 1 & -1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $A$ est la matrice de la famille $(f_1, \dots, f_{n-1})$ sur les variables $x_3, \dots, x_{n+1}$. En particulier, le déterminant de $M$ est égal $-2 \det A$ qui est non nul puisque les $f_1, \dots, f_{n-1}$ sont indépendantes. Donc les formes linéaires de la décomposition de $q$ sont indépendantes. $\square$

### 2.4.4 Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

Deux formes quadratiques sur un espace vectoriel $E$ sont dites **équivalentes** si ils existent des bases de $E$ sur lesquelles elles ont la même matrice.

$q, q$ forms quadratiques sur $E$

$p$ est équivalent à $q$ s'il existe $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de $E$ avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p)$

On commence par un résultat général sur le rang des formes quadratiques.

**Théorème 2.18.** *Soit $q$ une forme quadratique. Les trois quantités suivantes sont égales*

a. *Le rang de $q$ ;* $= \operatorname{rang} Q = \operatorname{rang} \mathrm{Mat}\, Q$

b. *Le nombre de vecteurs non isotropes dans une base orthogonale de $q$ ;* → $(e_1, .., e_n)$ base orth. de $q$ ($=$ de $Q$)

c. *Le nombre de formes linéaires apparaissant avec un coefficient non nul dans une décomposition de $q$ en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.*

$Q(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$

On compte $e_s$ $e_i$ avec $q(e_i) \neq 0$

*Démonstration.* Commençons par démontrer que $a. = b.$ On note $Q$ la forme polaire de $q$ et $r$ son rang. On a $\dim \operatorname{Ker} Q = n - r$ par le théorème du rang. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ orthogonale pour $q$. Notons $t$ le nombre de vecteurs non isotropes et ordonnons les vecteurs de la base de telle sorte que les $t$ premiers vecteurs sont non isotropes. La matrice de $Q$ sur la base $\mathcal{B}$ est diagonale avec les premiers $t$ coefficients non nuls et les autres nuls. Il est donc clair que $r = t$.

$(e_1, .., e_t, e_{t+1}, .., e_n)$ → non iso.

On montre à présent que $b. = c.$ Soit

$$\boxed{q(x) = \lambda_1 f_1(x)^2 + \cdots + \lambda_s f_s(x)^2}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ non nuls, une décomposition de $q$ en somme de carrés de formes linéaires indépendantes. On complète la famille $(f_1, \dots, f_s)$ en une base $(f_1, \dots, f_n)$ de $E^*$. On pose $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base contraduale, c'est une base orthogonale pour $q$. Calculons

non nuls

$$\begin{pmatrix} q(e_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & q(e_t) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$q(e_i) = \lambda_1 f_1(e_i)^2 + \cdots + \lambda_s f_s(e_i)^2.$$

$q(e_i) = \lambda_i \neq 0$ si $i \leq s$

$q(e_i) = 0$ si $i > s$

On a $f_j(e_i) = 0$ si $i \neq j$ et $f_i(e_i) = 1$, et ainsi, on trouve que $q(e_i) = 0$ pour $i > s$ et $q(e_i) = \lambda_i \neq 0$ pour $i \leq s$. Ainsi le nombre de vecteurs non isotropes de la base $\mathcal{B}$ est $s$ et l'égalité est démontrée. □

nombre de coeff. non nuls

On en déduit la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$.

**Corollaire 2.19.** *Soit $q$ une forme quadratique sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. Soit $r$ le rang de $q$. Alors il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ pour laquelle on a*

$$\boxed{q(x) = x_1^2 + \cdots + x_r^2.}$$

→ matrice $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$ ($r$)

*avec $\boxed{x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.}$*
*Ainsi, deux formes quadratiques de $E$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

*Démonstration.* Soit $(e'_1, \ldots, e'_n)$ une base orthogonale de $E$. Par le théorème, on peut supposer que $e'_1, \ldots, e'_r$ sont non isotropes et $e'_{r+1}, \ldots, e'_n$ sont isotropes. Pour $i = 1, \ldots, r$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\alpha_i \neq 0$, tels que $\alpha_i^2 = q(e'_i)$. On pose $e_i = e'_i/\alpha_i$ pour $i = 1, \ldots, r$ et $e_i = e'_i$ pour $i = r+1, \ldots, n$. Il est clair que $q$ a bien l'expression voulue sur cette base. □

Tout nombre complexe est un carré dans $\mathbb{C}$

On s'intéresse à présent au cas des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$. Dans une décomposition de $q$ en somme de carrées de formes linéaires indépendantes, on note $s$ le nombre de formes avec un coefficient strictement positif et $t$ le nombre de formes avec un coefficient strictement négatif. On appelle le couple $(s,t)$ la **signature** de $q$.

sur $E$ $\mathbb{R}$-ev de dim. $n$

$(e_1, .., e_n)$ base orth.

**Théorème 2.20** (Sylvester)**.** *Soit $q$ une forme quadratique de signature $(s,t)$. Alors, la signature ne dépend pas du choix de la décomposition. De plus, on a*

avec $q(e_1), .., q(e_s) > 0$

1. *Dans une base orthogonale pour $q$, il y a $s$ vecteurs dont l'image par $q$ est strictement positive et $t$ dont l'image par $q$ est strictement négative.*
2. *Il existe des sous-espaces vectoriels $E^+$ et $E^-$ tels que*
   - $\dim(E^+) = s$, $\dim(E^-) = t$,
   - $\boxed{E = E^+ \oplus E^- \oplus E^\perp}$,
   - $q(x) > 0$ *pour tout* $x \in E^+ \setminus \{0\}$,
   - $q(x) < 0$ *pour tout* $x \in E^- \setminus \{0\}$.
3. *Le rang de $q$ est $s + t$.* □

$E^\perp = \operatorname{Ker} Q$

$q(e_{s+1}), ..., q(e_{s+t}) < 0$

$q(e_{s+t+1}) = \dots = q(e_n) \dots = 0$

On en déduit la classification des formes quadratiques réelles.

**Proposition 2.21.** *Soit $q$ une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. Soit $(s,t)$ la signature de $q$. Alors il existe une base de $E$ pour laquelle on a*

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_{s+t}^2$$

*avec $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.*

*Ainsi, deux formes quadratiques de $E$ sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.* □

$E^+ = \operatorname{Vect}(e_1, .., e_s)$

$E^- = \operatorname{Vect}(e_{s+1}, .., e_{s+t})$

$E^\perp = \operatorname{Vect}(e_{s+t+1}, .., e_n)$

Sur $\mathbb{R}$

il n'existe pas de vecteur isotrope

Une forme quadratique $q$ est dite **positive** (resp. **négative**) si elle vérifie $q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) \leq 0$) pour tout $x \in E$. Si, de plus, la forme quadratique $q$ vérifie $q(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$, alors elle est dite **définie positive** (resp. **définie négative**).

$q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ vecteur nul

**Proposition 2.22.** *Soit $q$ une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$.*

- *$q$ est positive si et seulement si elle est de signature $(m, 0)$ avec $0 \leq m \leq n$.* $\to E = E^+ \oplus E^\perp$
- *$q$ est négative si et seulement si elle est de signature $(0, m)$ avec $0 \leq m \leq n$.* $\to E = E^- \oplus E^\perp$
- *$q$ est définie positive si et seulement si elle est de signature $(n, 0)$.* $E = E^+$
- *$q$ est définie négative si et seulement si elle est de signature $(0, n)$.* $E = E^-$

□

Soit $q$ une forme quadratique définie (positive ou négative), on remarque que $q$ est *non dégénérée* car sinon il existe un vecteur $x$ non nul dans Ker $q$, donc $x$ est isotrope, c'est-à-dire $x \neq 0$ et $q(x) = 0$ ce qui donne une contradiction.

$\hookrightarrow Q(x, y) = 0 \quad \forall y$

$\hookrightarrow Q(x, x) = q(x) = 0$

$E = \mathbb{R}^n$

$q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$

## 2.5 Espaces euclidiens

### 2.5.1 Inégalité de $\boxed{\text{Cauchy-Schwarz}}$

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Théorème 2.23.** *Soit $q$ une forme quadratique de $E$. On suppose $q$ positive et on note $Q$*

$Q(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

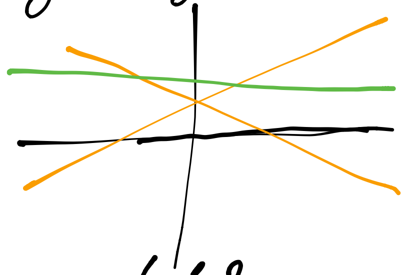
$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \times \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$$

*sa forme polaire. Pour tous $x, y \in E$, on a*

$$\boxed{Q(x,y)^2 \leq q(x)q(y).}$$

$x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$

*De plus, si $q$ est définie positive, on a égalité si et seulement si $x$ et $y$ sont colinéaires.*



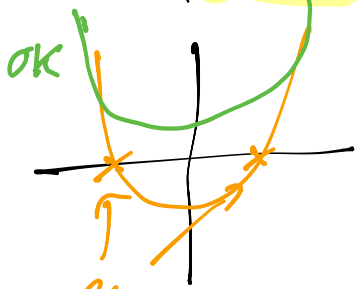

*Démonstration.* Soit $t \in \mathbb{R}$, on considère le polynôme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$\begin{aligned} \boxed{f(t) = q(x+ty)} &= Q(x+ty, x+ty) \quad \leftarrow \text{bilinéaire sym.} \\ &= Q(x,x) + Q(ty,ty) + 2Q(x,ty) \\ \boxed{f(t)} &= \boxed{q(x) + t^2 q(y) + 2tQ(x,y).} \quad \leftarrow \text{poly. en } t \text{ de degré} \leq 2 \end{aligned}$$

Puisque $q$ est positive, on a $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si $y$ est isotrope, alors le polynôme $f$ est de degré $\leq 1$ et ne change pas de signe. Ceci n'est possible que s'il est constant et donc $Q(x,y) = 0$. On a alors trivialement l'inégalité. Si $y$ n'est pas isotrope, $f(t)$ est un polynôme de degré deux qui ne change pas de signe et donc son discriminant est négatif. On calcule

$\to f(t) = q(x) + t(2Q(x,y))$

$$\boxed{\Delta = (2Q(x,y))^2 - 4q(x)q(y) \leq 0,}$$




et le résultat suit en divisant par 4 l'inégalité.

Supposons que $q$ est définie positive. Si $q(x) = 0$ alors $x = 0$ et tout vecteur est colinéaire à $x$. Sinon, l'égalité implique que le discriminant s'annule et $f(t)$ a une racine dans $\mathbb{R}$, disons $t_0$. On a donc $f(t_0) = q(x + t_0 y) = 0$ donc $x = -t_0 y$, c'est-à-dire $x$ et $y$ sont colinéaires. $\square$

$x = \lambda y \qquad q(x) = q(\lambda y) = \lambda^2 q(y)$

$Q(x,y) = Q(\lambda y, y) = \lambda Q(y,y) = \lambda q(y)$ toujours vrai

$\mathrm{Ker}(q) \subset C(q)$

**Corollaire 2.24.** *Soit $q$ une forme quadratique positive, alors le noyau de $q$ est égal au cône isotrope de $q$.*

*Démonstration.* On sait déjà que tout vecteur de $\mathrm{Ker}\, q$ est isotrope, il reste donc à montrer la réciproque : tout vecteur isotrope est dans $\mathrm{Ker}\, q$. Soit $x$ un vecteur isotrope, on obtient par le précédent théorème que, pour tout $y \in E$, on a

$x \perp y$

$$Q(x,y)^2 \leq q(x)q(y) = 0$$

car $q(x) = 0$

d'où $Q(x,y) = 0$ pour tout $y \in E$ d'où $x \in \mathrm{Ker}\, q$. □

Une application directe de ce corollaire est le résultat suivant

$\mathrm{Ker}(q) = \{0\}$

**Proposition 2.25.** *Soit $q$ est une forme quadratique positive. Alors, $q$ est non dégénérée si et seulement si $q$ est définie.* □

$\to C(q) = \{0\}$

### 2.5.2 Définitions et premières propriétés

sur $\mathbb{R}$

On appelle **espace euclidien** un espace vectoriel réel $E$ de dimension finie muni d'une forme quadratique définie positive $q$. On appelle la forme polaire de $q$ le **produit scalaire** de $E$ et on la note

$$\langle x, y \rangle.$$

Pour $x \in E$, on pose

$$\|x\| = \sqrt{q(x)} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

possible car $q(x) \geq 0$

Idée : généraliser

$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

produit scalaire et norme classiques sur $R^2$

la **norme** de $x$.

Par les résultats précédents, on sait que le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

La norme vérifie les propriétés suivantes :

1. $\|x\| \geq 0$ pour tout $x \in E$,
2. $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
4. $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pour tout $x, y \in E$, ← Cauchy-Schwarz
5. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in E$.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{q(\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 q(x)} = |\lambda| \sqrt{q(x)}$$

La propriété 1 vient de la définition de la norme comme racine carrée. Pour 2, on utilise le fait que $q$ est définie. La propriété 3 vient du fait que $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne 4. Finalement l'inégalité 5 est le résultat suivant.

**Théorème 2.26** (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous $x, y \in E$, on a*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

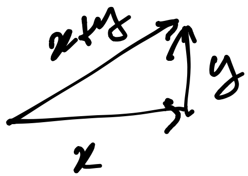
*Démonstration.* On a d'une part

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= q(x + y) = q(x) + q(y) + 2\langle x, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

$$q(x+y, x+y) = \langle x+y, x+y\rangle = \underbrace{\langle x, x\rangle}_{q(x)} + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \underbrace{\langle y, y\rangle}_{q(y)}$$

Et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a d'autre part

$$\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle| = \sqrt{\langle x, y\rangle^2} \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} = \|x\|\,\|y\|.$$




En remplaçant, on trouve

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Donc on obtient l'inégalité voulue en prenant les racines carrées de chaque côté. □

Pythagore

Une autre propriété importante de la norme est donnée par le résultat suivant.

**Proposition 2.27.** *Soient $x, y \in E$. On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si et seulement si $x \perp y$.*

*Démonstration.* Cela suit directement de l'égalité (déjà vue ci-dessus)

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle. \quad \square$$

$\langle x,y\rangle = 0 \iff x \perp y$

### 2.5.3 Bases orthonormées

Soit $q$ une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$. Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ est une **base orthonormée** (pour $q$) si c'est une base orthogonale et si, pour $i = 1, \ldots, n$, on a de plus

$$q(e_i) = 1.$$