Réduction des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$

$x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

forme quadratique $\quad q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \mu_{ij} x_i x_j \quad \mu_{ij} \in \mathbb{R}$

- Réduction de Gauss :

$$q(x) = d_1 f_1(x)^2 + \dots + d_n f_n(x)^2$$

$d_i \in \mathbb{R}$
$d_i = 0$ est <u>possible</u>

$(f_1, \dots, f_n)$ base de $(\mathbb{R}^n)^* =$ dual de $\mathbb{R}^n$

$$f_i(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \quad a_i \in \mathbb{R}$$

- Calcul de la base contravariante :

$(e_1, \dots, e_n)$ base de $\mathbb{R}^n$ avec

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, on a

$$q(x) = d_1 c_1^2 + \dots + d_n c_n^2$$

matrice $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

avec $x = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$ (même d_i que ci-dessus)

Remarque $\quad q(e_i) = \lambda_i \quad \forall i$

Equivalence sur $\mathbb{C}$

$q(x)$ forme quadratique sur E $\mathbb{C}$-ev

Dans une base orthogonale $(e_1', \dots, e_n')$ $x = x_1 e_1' + \dots + x_n e_n'$

$$q(x) = d_1 x_1^2 + \dots + d_r x_r^2$$ avec $d_1, \dots, d_r \neq 0$ (complexes)

On pose $\alpha_i \in \mathbb{C}$ tel que $d_i = \alpha_i^2$ avec $1 \leq i \leq r$
$\alpha_i \neq 0$

On pose $e_1 = \frac{1}{\alpha_1} e_1', \dots, e_r = \frac{1}{\alpha_r} e_r', e_{r+1} = e_{r+1}', \dots, e_n = e_n'$

alors dans la base $(e_1, \dots, e_n)$

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$$

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Dans $(e_1', \dots, e_n')$

$$\begin{aligned} q(x) &= d_1 x_1^2 + \dots + d_r x_r^2 \\ &= \alpha_1^2 x_1^2 + \dots + \alpha_r^2 x_r^2 \\ &= (\alpha_1 x_1)^2 + \dots + (\alpha_r x_r)^2 \end{aligned}$$

Equivalence sur $\mathbb{R}$

q forme quadratique sur $\mathbb{R}$.ev

Réduction $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$ $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ non nuls

On ordonne les λ_i : $\lambda_1, \dots, \lambda_s > 0$ $s+t=r$

$\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{s+t} < 0$

$\lambda_i = \alpha_i^2$ $(\alpha_i = \sqrt{\lambda_i})$ pour $i=1, \dots, s$

$-\lambda_i = \alpha_i^2$ $(\alpha_i = \sqrt{-\lambda_i})$ pour $i = s+1, \dots, s+t$

$$q(x) = (\alpha_1 x_1)^2 + \dots + (\alpha_s x_s)^2 - (\alpha_{s+1} x_{s+1})^2 - \dots - (\alpha_{s+t} x_{s+t})^2$$