Et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a d'autre part

$$\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle| = \sqrt{\langle x, y\rangle^2} \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} = \|x\|\,\|y\|.$$

En remplaçant, on trouve

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

Donc on obtient l'inégalité voulue en prenant les racines carrées de chaque côté. □

Une autre propriété importante de la norme est donnée par le résultat suivant.

Proposition 2.27. *Soient $x, y \in E$. On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si et seulement si $x \perp y$.*

Démonstration. Cela suit directement de l'égalité (déjà vue ci-dessus)

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle. \quad \square$$

2.5.3 Bases orthonormées

Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est une **base orthonormée** (pour q) si c'est une base orthogonale et si, pour $i = 1, \dots, n$, on a de plus

$$q(e_i) = 1.$$

$e_i \perp e_j$ si $i \neq j$

$Q(e_i, e_j) = 0$

Théorème 2.28. *Soit (E, q) un espace quadratique réel. Alors E est un espace euclidien si et seulement si il admet une base orthonormée.*

Démonstration. Supposons pour commencer que E est euclidien. Soit $(e'_1, \ldots, e'_n)$ une base orthogonale pour q. Alors, on a $q(e'_i) > 0$ pour tout i puisque q est définie positive. Donc, on peut donc poser

réduction de Gauss

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{q(e'_i)}}\, e_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Il est alors clair que la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée.

Réciproquement, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Sur cette base, q s'écrit

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

avec $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Ainsi q ne prend que des valeurs positives et ne s'annule que si $x_1 = \cdots = x_n = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. Ceci démontre que q est définie positive. $\square$

Corollaire 2.29. *Soit (E, q) un espace euclidien de dimension n. Alors (E, q) est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ munit de la norme euclidienne*

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}. \qquad \square$$

Supposons que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base orthonormale de E. Soient $x, y \in E$. On écrit $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$. On a alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t XY$$

$(e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée de E

$x \in E$

$x \mapsto X \in \mathbb{R}^n$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

avec $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ et $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$.

Soit E un espace euclidien. Pour conclure cette section, nous expliquons une méthode qui permet de construire une base orthonormale à partir d'une base quelconque de E. Cette méthode s'appelle le **procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**.

Théorème 2.30. *Soit $(a_1, \dots, a_n)$ une base de E. Pour $i = 1, \dots, n$, on pose*

$$\boxed{f_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle f_j, a_i \rangle}{\|f_j\|^2} f_j} \quad \text{et} \quad e_i = \frac{1}{\|f_i\|} f_i.$$

Alors la base $(f_1, \dots, f_n)$ est orthogonale et la base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale. De plus, pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$\boxed{\mathrm{Vec}(a_1, \dots, a_k) = \mathrm{Vec}(f_1, \dots, f_k)} = \mathrm{Vec}(e_1, \dots, e_k).$$

Démonstration. Il est clair que la base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale si la base $(f_1, \dots, f_n)$ est orthogonale. Pour démontrer le résultat, on montre par récurrence sur $1 \leq r \leq n$ que la famille de vecteurs $(f_1, \dots, f_r)$ est libre et orthogonale. Pour $r = 1$, le résultat est clair puisque $a_1 \neq 0$. On suppose le résultat vrai pour $1 \leq r < n$. On considère la famille $(f_1, \dots, f_{r+1})$. Pour $i = 1, \dots, r$, on a

$$\langle f_{r+1}, f_i \rangle = \langle a_{r+1}, f_i \rangle - \sum_{j=1}^{r} \frac{\langle f_j, a_{r+1} \rangle}{\|f_j\|^2} \langle f_j, f_i \rangle = \langle a_{r+1}, f_i \rangle - \frac{\langle f_i, a_{r+1} \rangle}{\|f_i\|^2} \langle f_i, f_i \rangle$$

puisque la famille $(f_1, \ldots, f_r)$ est orthogonale. Comme $\langle f_i, f_i \rangle = \|f_i\|^2$, on a bien $\langle f_{r+1}, f_i \rangle = 0$ et la famille $(f_1, \ldots, f_{r+1})$ est orthogonale. Notons pour finir qu'il est direct de montrer qu'une famille $(f_1, \ldots, f_{r+1})$ orthogonale de vecteurs non nuls est libre puisque on a

$$\overbrace{\|\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{r+1} f_{r+1}\|^2}^{=0} = \lambda_1^2 \|f_1\|^2 + \cdots + \lambda_{r+1}^2 \|f_{r+1}\|^2 = 0$$

$\|f_i\| \neq 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$

On démontre à présent la dernière affirmation. Notons pour commencer qu'il est clair par construction que $\mathrm{Vec}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{Vec}(e_1, \ldots, e_k)$. Maintenant, il est facile de voir par construction que $\mathrm{Vec}(f_1, \ldots, f_k) \subset \mathrm{Vec}(a_1, \ldots, a_k)$. Maintenant, la famille $(f_1, \ldots, f_k)$ est orthogonale et donc est libre par la remarque ci-dessous. On a donc $\dim \mathrm{Vec}(f_1, \ldots, f_k) = \dim \mathrm{Vec}(a_1, \ldots, a_k)$ et ces deux sous-espaces vectoriels sont égaux. □

Exemple. On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 + 2(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2.$$

Il est clair que q est positive. De plus, on a $q(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ donc elle est définie positive. On travaille sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ munit de la norme correspondant à q et on calcule une base orthogonale (f_1, f_2, f_3) à partir de la base canonique (a_1, a_2, a_3) en

(f_1, f_2, f_3) orthogonale
$\rightsquigarrow$ orthonormale ?

utilisant la procédé de Gram-Schmidt. On a

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 = {}^t(1,0,0), \\ f_2 &= a_2 - \frac{\langle f_1, a_2 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = a_2 + \tfrac{3}{4} f_1 = {}^t(3/4, 1, 0), \\ f_3 &= a_3 - \frac{\langle f_1, a_3 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle f_2, a_3 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2 = a_3 - \tfrac{1}{4} f_1 - \tfrac{7}{27} f_2 = {}^t(-4/9, -7/27, 1). \end{aligned}$$

$$e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1 = \frac{1}{2} f_1$$

La matrice de changement de base de la base canonique à la base (f_1, f_2, f_3) est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & -4/9 \\ 0 & 1 & -7/27 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$e_2 = \frac{1}{\|f_2\|} f_2 \ldots$$

$$e_3 = \frac{1}{\|f_3\|} f_3$$

On remarque que la matrice de passage est triangulaire supérieure. En fait, la procédé de Gram-Schmidt assure que la matrice de changement de base de la base $(a_1, \ldots, a_n)$ à la base $(f_1, \ldots, f_n)$ (et à la base $(e_1, \ldots, e_n)$) est une matrice triangulaire supérieure grace au résultat suivant.

Proposition 2.31. *Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E. Supposons que, pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $\boxed{\mathrm{Vec}(a_1, \ldots, a_k) = \mathrm{Vec}(b_1, \ldots, b_k)}$. Alors, la matrice de changement de base de la base $(a_1, \ldots, a_n)$ à la base $(b_1, \ldots, b_n)$ est triangulaire supérieure.*

Démonstration. Soit $P = (\lambda_{ij})$ cette matrice. Par définition, pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$b_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} a_i.$$

Mais, puisque $b_k \in \mathrm{Vec}(a_1, \ldots, a_k)$, on a $\lambda_{ik} = 0$ pour $i > k$. Donc la matrice P est triangulaire supérieure. $\square$

Remarque. Ce résultat implique en particulier que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure de déterminant non nul est aussi une matrice triangulaire supérieure.

2.5.4 Matrices orthogonales

(= orthonormales)

Soit (E, q) un espace euclidien. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux base de E. On note A (resp. A') la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$), et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On a donc

$$A' = {}^tP\,A\,P.$$

Supposons à présent que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases orthonormées. Alors A et A' sont toutes deux la matrice identité I et on obtient donc

$$I = {}^tP\,P,$$

ou encore

$$\boxed{{}^tP = P^{-1}.}$$

P orthogonale : P inversible et ${}^tP = P^{-1}$

Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale

Une matrice inversible P vérifiant cette propriété est une **matrice orthogonale**.

Proposition 2.32. *Une matrice P dans $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ est orthogonale si et seulement si P est la matrice de changement de bases entre deux bases orthonormales de E.* □

2.5.5 Adjoint d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de E, un espace euclidien. On dit que l'endomorphisme v est **adjoint** de u si on a

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$$

pour tout $x, y \in E$.

Théorème 2.33. *Soit u un endomorphisme de E. Alors, u admet un unique endomorphisme adjoint u^*.*

Démonstration. Plaçons-nous dans une base orthonormée de E. Dans une telle base, le produit scalaire est donné par la formule

$$\langle x, y\rangle = {}^tXY$$

avec X (resp. Y) le vecteur représentant x (resp. y) sur la base. Soit A la matrice de u sur cette base, on a donc

$$\langle x, u(y)\rangle = {}^tXAY$$