Rappels

E un $\mathbb{R}$-ev de dim n.

$q : E \to \mathbb{R}$ forme quadratique

- On suppose q définie positive :

$$\forall x \in E,\ x \neq 0,\ q(x) > 0 \quad (q(0) = 0)$$

- (E, q) espace euclidien
- Norme : $\|x\| = \sqrt{q(x)}$

Produit scalaire : $\langle x, y \rangle$ forme polaire de q

forme bilinéaire symétrique non dégénérée

$\forall x \in E,\ x \neq 0$ alors $\exists y \in E$ avec $\langle x, y \rangle \neq 0$

- Inégalité triangulaire

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ssi $x \perp y$

(ssi $\langle x, y \rangle = 0$)

- Réduction de Gauss

signature de q est $(n, 0)$

Il existe une base $(e_1', \ldots, e_n')$ de E telle que dans cette base

$$q(x) = \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2 \quad , \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$$

où $x = x_1' e_1' + \dots + x_n' e_n'$

On pose $e_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i'$ $i = 1, \dots, n$

alors $\|e_i\| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \|e_i'\| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \sqrt{q(e_i')} = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_i}} = 1$

et de plus $e_i \perp e_j$ si $i \neq j$

En d'autres termes, la matrice de q sur cette base est l'identité

Gram - Schmidt $\quad E$ espace euclidien de dim n

$(a_1, .., a_n)$ base de E

But: construire une base $(f_1, .., f_n)$ orthogonale avec $Vec(a_1, ..., a_k) = Vec(f_1, ..., f_k)$ pour $k = 1, .., n$

- On pose $f_1 = a_1$
- Pour f_2, on pose $f_2 = a_2 + \lambda f_1$ avec λ à déterminer

On veut $f_1 \perp f_2$:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0 \iff \langle f_1, a_2 + \lambda f_1 \rangle = 0$$

$$\iff \langle f_1, a_2 \rangle + \lambda \langle f_1, f_1 \rangle = 0$$

$$\iff \lambda = - \frac{\langle f_1, a_2 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} = - \frac{\langle f_1, a_2 \rangle}{\| f_1 \|^2}$$

$$\boxed{f_2 = a_2 - \frac{\langle f_1, a_2 \rangle}{\| f_1 \|^2} f_1}$$

- $f_3 = a_3 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$

$\cdot \cdot \langle f_1, f_3 \rangle = 0 \iff \langle f_1, a_3 \rangle + \lambda_1 \langle f_1, f_1 \rangle + \lambda_2 \cancel{\langle f_1, f_2 \rangle} = 0$

car $f_1 \perp f_2$

$$\iff \lambda_1 = - \frac{\langle f_1, a_3 \rangle}{\| f_1 \|^2}$$

$$\therefore \langle f_2, f_3 \rangle = 0 \iff c_2 = -\frac{\langle f_2, a_3 \rangle}{\|f_2\|^2}$$

$$\boxed{f_3 = a_3 - \frac{\langle f_1, a_3 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle f_2, a_3 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2}$$

$$q(x) = x_1^2 + 2(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1+x_2+x_3)^2$$

(a_1, a_2, a_3) base canonique

Gram-Schmidt

- $f_1 = a_1 = {}^t(1,0,0)$
- $f_2 = a_2 - \dfrac{\langle f_1, a_2\rangle}{\|f_1\|^2} f_1$

$$f_2 = {}^t(0,1,0) + \frac{3}{4}\,{}^t(1,0,0)$$

$$= {}^t(3/4, 1, 0)$$

- $f_3 = a_3 - \dfrac{\langle f_1, a_3\rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \dfrac{\langle f_2, a_3\rangle}{\|f_2\|^2} f_2$

$$f_3 = a_3 - \frac{1}{4} f_1 - \frac{7/4}{27/4} f_2$$

$$= {}^t(1,0,0) - \frac{1}{4}\,{}^t(1,0,0) -$$

$Q(x,y) = \langle x, y\rangle$

$= x_1y_1 + 2(x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2)$

$+ (x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$

$\langle \underbrace{f_1}_{{}^t(1,0,0)}, \underbrace{a_2}_{{}^t(0,1,0)}\rangle = 1\times 0 + 2(1-2\times 0)(0-2\times 1)$

$+ (1+0+0)(0+1+0)$

$= -4+1 = -3$

$\|f_1\|^2 = q(f_1) = 1^2 + 2(1-2\times 0)^2 + (1+0+0)^2$

$= 4$

$\langle \underbrace{f_1}_{{}^t(1,0,0)}, \underbrace{a_3}_{{}^t(0,0,1)}\rangle = 1\times 0 + 2\times 1\times 0 + 1\times 1 = 1$

$\langle \underbrace{f_2}_{{}^t(3/4,1,0)}, \underbrace{a_3}_{{}^t(0,0,1)}\rangle = \frac{3}{4}\times 0 + 2\times\left(\frac{3}{4}-2\right)\times 0 + \left(\frac{3}{4}+1\right)\times 1$

$= 7/4$

$\|f_2\|^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4}-2\right)^2$

$$\frac{27}{7}t\,(3/4, 1, 0)$$

$$= t\,(-4/9, -7/27, 1)$$

$$+ \left(\frac{3}{4} + 1\right)^2$$

$$= \frac{9}{16} + 2 \times \frac{25}{16} + \frac{49}{16}$$

$$= \frac{108}{16} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4}$$