$E^* =$ dual de $E = \{f : E \to \mathbb{K}\}$

Une matrice inversible P vérifiant cette propriété est une **matrice orthogonale**.

Proposition 2.32. *Une matrice P dans $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ est orthogonale si et seulement si P est la matrice de changement de bases entre deux bases orthonormales de E.* □

2.5.5 Adjoint d'un endomorphisme

$\|x\| = \sqrt{q(x)}$ $\langle x, y\rangle = \varphi(x,y)$

$u : E \to E$

Soit u un endomorphisme de E, un espace euclidien. On dit que l'endomorphisme v est **adjoint** de u si on a

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$$

pour tout $x, y \in E$.

Théorème 2.33. *Soit u un endomorphisme de E. Alors, u admet un unique endomorphisme adjoint u^*.*

Démonstration. Plaçons-nous dans une base orthonormée de E. Dans une telle base, le produit scalaire est donné par la formule

$$\langle x, y\rangle = {}^tXY$$

avec X (resp. Y) le vecteur représentant x (resp. y) sur la base. Soit A la matrice de u sur cette base, on a donc

$$\langle x, u(y)\rangle = {}^tXAY$$

puisque AY est le vecteur représentant $u(y)$. Soit maintenant v un autre endomorphisme de matrice B. On a

$$\langle v(x), y\rangle = {}^t(BX)Y = {}^tX\,{}^tBY.$$

Ainsi v est l'adjoint de u si et seulement si ${}^tB = A$, c'est-à-dire $B = {}^tA$, ce qui démontre l'existence et l'unicité de l'adjoint de u. $\square$

Remarque. La preuve du théorème démontre que *dans une base orthonormée* la matrice de l'adjoint u^* de u est la transposée ${}^tA$ de la matrice A de u. Si on change de base, alors la matrice de u devient

$$B = P^{-1}AP$$

où P est la matrice de changement de bases. D'un autre côté, la matrice de l'adjoint u^* devient

$$B^* = (P^{-1})^t AP.$$

Et, si on calcule

$${}^t\big(P^{-1}AP\big) = {}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1}.$$

Ainsi, la transposée de B^* est égale à la matrice B si et seulement si ${}^tP = P^{-1}$, c'est-à-dire si et seulement si P est une matrice orthogonale, et donc une matrice de passage entre deux bases orthonormales. En conclusion, les matrices de u et de son adjoint u^* sont transposées *uniquement dans une base orthonormale de E*.

2.5.6 Endomorphismes auto-adjoints et orthogonaux

Un endomorphisme u de E est **symétrique**, ou **auto-adjoint**, s'il est égal à son adjoint u^*
$\cancel{\tilde{u}}$, et donc il vérifie

$$\boxed{\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle}$$

pour tout $x, y \in E$. Par le résultat de la section précédente, on obtient

Proposition 2.34. *Un endomorphisme u est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.*

Un endomorphisme u de E est **orthogonal** s'il est inversible et son adjoint est égal à son inverse, c'est-à-dire $u^* = u^{-1}$ et donc

$$\boxed{\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^{-1}(y)\rangle}$$

pour tout $x, y \in E$.

Proposition 2.35. *Un endomorphisme u est orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est orthogonale.*

Démonstration. C'est évident puisque la matrice de u^{-1} dans toute base de E est l'inverse de la matrice de u. $\square$

Les endomorphismes orthogonaux jouent un rôle primordial dans les espaces euclidiens.

$\|x\| = \sqrt{q(x)}$

Théorème 2.36. *Soit u un endomorphisme de E. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est orthogonale,*
2. *u préserve le produit scalaire, c'est-à-dire $\langle x, y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle$ pour tout $x, y \in E$,*
3. *u préserve la norme, c'est-à-dire $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. *1.⇒2.* Supposons que u est un endomorphisme orthogonal. Alors, pour tout $x, y \in E$, on a

u^*

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, (\tilde{u} \circ u)(y)\rangle = \langle x, (u^{-1} \circ u)(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

$u^* = u^{-1}$

2.⇒3. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

et le résultat suit en prenant les racines carrées puisque $\|u(x)\|$ et $\|x\|$ sont positifs.

3.⇒1. Plaçons nous dans une base orthonormée de E et notons A la matrice de u sur cette base. Si on écrit X le vecteur représentant $x \in E$ sur cette base, on trouve

$$\|u(x)\|^2 = q(u(x)) = {}^t(AX)\, \underset{=}{I}\, AX = {}^tX\, {}^tA\, A\, X$$

puisque AX est le vecteur représentant $u(x)$ et que la matrice de q dans une base orthonormée est la matrice identité I. D'un autre côté, on a

$=$

$$\|x\|^2 = q(x) = {}^tX\, X.$$

petit raisonnement à faire

$^tX\,^tAAX = {}^tXX \quad \forall$ vecteur $X \Longleftrightarrow {}^tAA = I$

Donc si $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ pour tout $x \in E$, on doit avoir

$$\boxed{{}^tA\,A = I,}$$

donc ${}^tA = A^{-1}$, ce qui implique que u est un endomorphisme orthogonal. □

2.5.7 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

On admet le résultat suivant.

Proposition 2.37. *Tout endomorphisme symétrique admet au moins une valeur propre.* (réelle)

Le résultat principal sur les espaces euclidiens est le théorème qui suit.

Théorème 2.38. *Soit u un endomorphisme symétrique de E. Alors, il existe une base orthonormée de E dans laquelle u est diagonal.*

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur la dimension n de E. Le résultat est évident pour $n = 1$ puisqu'en dimension 1 tout endomorphisme est diagonal dans toute base.

Supposons le résultat vrai pour n et considérons u un endomorphisme symétrique dans un espace euclidien E de dimension $n+1$. Soit λ un valeur propre de u, on sait que λ existe par la proposition précédente, et soit $b \in E$ vecteur propre associé à λ. Posons

$$a = \frac{1}{\|b\|}\, b.$$

on fait une autre

démonstration

Le vecteur a est de norme 1 et il est facile de voir que a est aussi un vecteur propre associé λ. Posons $F = a^\perp$. Alors F est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim E - 1 = n$ et donc

$$E = F \oplus \mathbb{R}a.$$

Montrons que la restriction de u à F est un endomorphisme de F, c'est-à-dire montrons que $u(x) \in F$ pour tout $x \in F$. On a

$$\langle u(x), a\rangle = \langle x, u(a)\rangle = \langle x, \lambda a\rangle = \lambda\langle x, a\rangle = 0$$

puisque $x \in a^\perp$. Ainsi, $u(x) \perp a$ et donc $u(x) \in a^\perp = F$. Notons v l'endomorphisme de F induit par la restriction de u à F. On vérifie aisément que v est symétrique et donc, par l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(a_1, \ldots, a_n)$ de F dans laquelle v est diagonal. Considérons la famille $(a_1, \ldots, a_n, a)$. Par la décomposition de E donnée ci-dessus, il est clair que c'est une base de E. De plus, c'est une base orthonormée puisque tous les vecteurs sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux. Pour finir, u est diagonal dans cette base puisqu'elle est uniquement formé de vecteurs propres (il est facile de voir que les vecteurs propres de v sont aussi des vecteurs propres de u). $\square$

Pour finir ce chapitre, on démontre le résultat très utile suivant

Proposition 2.39. *Soit u un endomorphisme symétrique de E. Deux vecteurs propres de u pour des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

Démonstration. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de u et soient x_1 et x_2 deux vecteurs propres associées respectivement à λ_1 et λ_2. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle &= \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle \\
&= \langle u(x_1), x_2\rangle \qquad \text{car } x_1 \text{ est un vecteur propre pour } \lambda_1 \\
&= \langle x_1, u(x_2)\rangle \qquad \text{car } u \text{ est symétrique} \\
&= \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle \qquad \text{car } x_2 \text{ est un vecteur propre pour } \lambda_2 \\
&= \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = 0$$

or $\lambda_1 \neq \lambda_2$ par hypothèse, donc $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. □

$\hookrightarrow x_1 \perp x_2$