E espace euclidien

$u : E \to E$ endo.

B base de E

$x, y \in E$ $\quad$ X, Y vecteurs repr. x et y sur B

U matrice de u sur B

A matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur B

$\langle x, y \rangle = {}^tXAY$ $\quad$ $u(x)$ est repr. par UX sur B

$\langle u(x), y \rangle = {}^t(UX)AY = {}^tX\,{}^tUAY$

$\langle u(x), y \rangle \in \mathbb{R}$ donc ${}^tX\,{}^tUAY = {}^t({}^tX\,{}^tUAY)$

$\ldots = {}^tY\,{}^tAUX = {}^tYAUX$ car ${}^tA = A$

$= \langle y, u(x) \rangle$

On veut trouver $v : E \to E$ tel que

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

V matrice de v sur B

$$\langle x, v(y) \rangle = {}^tXAVY$$

On veut $\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$

donc $\quad {}^t(UX)AY = {}^tXAVY$

$${}^tX\,{}^tUAY = {}^tXAVY$$

(on cherche V)

on veut avoir $\quad {}^tUA = AV$

puisque $\underline{A \text{ est inversible}}$, on a

$$\boxed{V = A^{-1}\,{}^tUA}$$

V existe et est unique

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ non dégénéré donc A est inversible

Si on suppose que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée

alors $\quad A = I_n \quad$ donc $\boxed{V = {}^tU}$

Diagonalisation d'un endo. symétrique

E espace euclidien

$u : E \to E$ symétrique

- Calcul du poly. caract. de u
- Calcul les racines du poly. caract = valeurs propres
- Pour chaque valeur propre λ, on calcule une base du sous-espace propre E_λ $(u(x) = \lambda x)$

On fait Gram-Schmidt pour en déduire une base orthonormée de E_λ

- On met ensemble les bases orthonormées obtenues et c'est gagné