Contrôle continu 2 – Lundi 4 avril 2022 - 14h-15h

Nom :

Prénom :

Exercice 1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -5 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités.
3. Pour chaque valeur propre de A, déterminer le sous-espace propre associé. En déduire que A est diagonalisable.
4. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que
$$A = PDP^{-1}.$$

Exercice 2. On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(x,y) = 3x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 - 3x_2y_2 + 2x_2y_3 - 3x_3y_1 - 2x_3y_2 - 2x_3y_3$$

avec $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ et $y = {}^t(y_1, y_2, y_3)$.

1. Montrer que Φ est une forme bilinéaire. Calculer sa matrice sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une forme bilinéaire symétrique Φ_s et une forme bilinéaire alternée Φ_a telles que
$$\Phi = \Phi_s + \Phi_a.$$
3. Calculer le noyau de Φ_s et le noyau de Φ_a.
4. Soit $x \in \ker \Phi_s \cap \ker \Phi_a$. Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}^3$, on a
$$\Phi(x,y) = \Phi(y,x) = 0.$$