Contrôle Terminal – Lundi 30 mai 2022 - 14h-16h

Nom :

Prénom :

Exercice 1. On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme bilinéaire symétrique

$$\Phi(x,y) = -2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 + 2x_3y_3$$

et le sous-espace vectoriel

$$H = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 = 0\right\}$$

Calculer l'orthogonal de H pour la forme Φ.

Exercice 2. Calculer la base contraduale de la base suivante du dual de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ f_2(x) &= -3x_2 - 3x_3 \\ f_3(x) &= x_3 \end{aligned}$$

Exercice 3. Calculer la réduction de la forme quadratique suivante par la méthode Gauss, puis en déduire sa signature.

$$q(x) = -x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2^2 - 4x_2x_3 - 8x_2x_4 - 2x_3x_4 - 2x_4^2$$

avec $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Exercice 4. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si et seulement si, pour tout $x \in E$, on a
$$x = \langle x, b_1 \rangle\, b_1 + \cdots + \langle x, b_n \rangle\, b_n.$$
2. On suppose que $\|b_i\| = 1$ pour $i = 1, \ldots, n$ et que, pour tout $x \in E$, on a
$$\|x\|^2 = \langle x, b_1 \rangle^2 + \cdots + \langle x, b_n \rangle^2.$$
Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale, puis que c'est une base orthonormale.

Exercice 5. On considère l'espace euclidien donné par $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire :
$$\langle x, y \rangle = 5x_1y_1 - 2x_1y_3 + 3x_2y_2 - 2x_3y_1 + x_3y_3.$$
Calculer la base obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base suivante :
$$\left({}^t(0,0,4), {}^t(3,0,0), {}^t(4,5,1)\right).$$