CC 1

Exercice 1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = {}^t(6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Soient $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$ deux vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
   (a) Calculer $f(b)$ et $f(c)$.
   (b) En déduire que la famille $\mathcal{F} = (b, c)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 2. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, f(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension un dont on donnera une base (a) .
2. Soient $b = {}^t(0, 1, 1)$ et $c = {}^t(1, 1, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(b)$ et $f(c)$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$
5. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.