CONTRÔLE CONTINU 1

Corrigé

DURÉE : 90 MINUTES.

1. Pour $\forall A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ si $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alors A est forcement égale à $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Faux : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Pour $\forall A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ si ${}^tA \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alors A est forcement égale à $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Vrai : ${}^t\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix}$

$a^2+c^2=0 \Rightarrow a=c=0$ et $b^2+d^2=0 \Rightarrow b=d=0$

3. Une matrice de $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ a la deuxième colonne constituée de 0. Alors le détérminant de B est 0.

Vrai. Le développement le déterminant de B suivant la deuxième colonne donne
$\det(B) = \sum_{i=1}^{3} b_{i2}\,\mathrm{cofact}(b_{i2}) = 0$ car $b_{i2}=0$ pour $\forall i$.

4. La matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -6 & 0 & 12 \end{bmatrix}$ est inversible.

Faux. Les matrices inversibles ont le déterminant nonnul. Ici :
$\det C = -0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

5. Les vecteurs $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de chacune des matrices suivantes : $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Vrai : $D_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $D_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$D_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $D_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$D_3 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow$ Tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est propre de D_3 avec valeur propre 1

Exercice 2. Déterminant et l'inverse

Soit $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1. Trouver $Comat(X)$, la comatrice de X. Montrer le calcul.

2. Trouver le déterminant de X. Montrer le calcul.

3. Trouver X^{-1}, la matrice inverse de X. Montrer le calcul.

1. $$\text{Comat}\, X = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

2. $\det X = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = -1$ selon la première ligne

3. $$X^{-1} = \frac{1}{\det X} {}^t(\text{Comat}\, X)$$
$$= - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercice 3. Somme directe, valeurs propres

Soit V et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = -y \right\} \text{ et } W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = -3y = z \right\}$$

1. Donner une base de V.

2. Donner une base de W.

3. Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

   (a) Calculer le déterminant de M.

   (b) Déterminer le rang de M.

   (c) Déterminer le noyau de M.

   (d) Montrer que W est un espace propre de M avec la valeur propre 0.

   (e) Montrer que V est un espace propre de M avec une valeur propre differente de 0. Laquelle ?

4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

1. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ avec $x=-y$ est engendré par $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ par exemple

2. La droite $x=-3y=z$ est donnée par un vect. directeur $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. a) $\det M = 0$ b). Alors $\operatorname{Ker} M \neq \{0\}$ et il existe un vecteur non-nul annulé par M — ça sera un vecteur propre à valeur propre 0.

Par le thm du rang $\dim \operatorname{Ker} M + \dim \operatorname{Im} M = \dim \mathbb{R}^3$

Comme $\dim \operatorname{Ker} M \geq 1$, la $\dim \operatorname{Im} M \leq 2$.

Elle est exactement 2 car $\operatorname{Im} M$ est engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ (ou n'importe quel couple de vecteurs parmi ces 3 colonnes, qui ne sont pas colinéaires).

c) $M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x + 3y = 0 \\ -x - 3y = 0 \\ 3x + \overset{-x}{3y} - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3y$ et $2z = 2x \Rightarrow z = x$

$\operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$

d) Donc tout vecteur sur la droite $x=-3y=z$ est dans le noyau de M. $\boxed{\operatorname{Ker} M = W}$

e) On calcule $M\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $M\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. On a $M\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

et $M\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Donc V est un espace propre de M avec la valeur propre $\boxed{-2}$.

4. Les trois vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, car $V \cap W = \emptyset$ et $\dim V + \dim W = 2+1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

On peut voir aussi que ces trois vects forment une base de $\mathbb{R}^3$ en montrant que ils sont linéairement independents ($\det [v_1, v_2, v_3] \neq 0$)