Université Claude Bernard (Lyon 1) Printemps 2022-2023
UE Math. Eco. Algèbre linéaire et bilinéaire 22 février 2023

CONTRÔLE CONTINU 1
DURÉE : 90 MINUTES.
Les appareils électroniques, les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1. Vrai ou faux
Les propositions suivantes concernent des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, les matrices réelles $n\times n$. Indiquer si la proposition est vraie ou fausse. Justifier votre réponse : donner une preuve courte (moins d'un paragraphe) si la proposition est vraie, si la proposition est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.

1. Pour $\forall A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ si $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alors A est forcement égale à $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
2. Pour $\forall A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ si ${}^tA \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alors A est forcement égale à $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
3. Une matrice de $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ a la deuxième colonne constituée de 0. Alors le détérminant de B est 0.
4. La matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -6 & 0 & 12 \end{bmatrix}$ est inversible.
5. Les vecteurs $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de chacune des matrices suivantes : $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 2. Déterminant et l'inverse

Soit $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1. Trouver $Comat(X)$, la comatrice de X. Montrer le calcul.
2. Trouver le déterminant de X. Montrer le calcul.
3. Trouver X^{-1}, la matrice inverse de X. Montrer le calcul.

Exercice 3. Somme directe, valeurs propres
Soit V et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = -y \right\} \text{ et } W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = -3y = z \right\}$$

1. Donner une base de V.

2. Donner une base de W.

3. Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

   (a) Calculer le déterminant de M.

   (b) Déterminer le rang de M.

   (c) Déterminer le noyau de M.

   (d) Montrer que W est un espace propre de M avec la valeur propre 0.

   (e) Montrer que V est un espace propre de M avec une valeur propre differente de 0. Laquelle ?

4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.