CC2 – Solutions

Exercice 1. Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

   Solution. *On a*
   $$\begin{aligned} C_A(T) &= \det \begin{pmatrix} 3-T & 0 & 0 \\ 0 & 4-T & 1 \\ 0 & 2 & 5-T \end{pmatrix} \\ &= (3-T)\big((4-T)(5-T)-2\big) \\ &= (3-T)(T^2-9T+18). \end{aligned}$$

2. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

   Solution. *3 est racine évidente de $C_A(T)$. Les racines de T^2-9T-2 sont 3 et 6. Donc les valeurs de A sont 3 et 6 de multiplicité 2 et 1 respectivement.*

3. Pour chaque valeur propre de A, trouver les vecteurs propres associés.

   Solution. *On commence avec E_3 le sous-espace propre associé à 3. On a ${}^t(x,y,z) \in E_3$ ssi*
   $$\begin{cases} 3x = 3x \\ 4y + z = 3y \\ 2y + 5z = 3z \end{cases} \iff y + z = 0.$$
   Donc on a $\dim E_3 = 2$ avec pour base $\big({}^t(1,0,0), {}^t(0,1,-1)\big)$ par exemple.

   Maintenant, on considère E_6 le sous-espace propre associé à 6. On a ${}^t(x,y,z) \in E_6$ ssi
   $$\begin{cases} 3x = 6x \\ 4y + z = 6y \\ 2y + 5z = 6z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$
   Donc on a $\dim E_6 = 1$ avec pour base $\big({}^t(0,1,2)\big)$ par exemple.

4. Montrer que A est diagonalisable.

   Solution. *Puisque $\dim E_3 + \dim E_6 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, la matrice A est diagonalisable.*

5. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

<u>Solution.</u> *En reprenant les résultats des questions précédentes, on trouve*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, le coefficient $(1,1)$ de la matrice A^n est 3^n.

On sait que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$A^n = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On calcule l'inverse de P, on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

On calcule (rappel : on a juste besoin de calculer le premier coefficient de A) :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & * & * \\ 2 \cdot 3^{n-1} & * & * \\ 6^n/3 & * & * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Et donc le résultat est démontré.
(Remarque : on peut aussi montrer le résultat directement par récurrence.)

Exercice 2. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les deux formes linéaires

$$f_1(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 \quad \text{et} \quad f_2(x) = x_2 - 3x_3$$

pour $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$\Psi(x,y) = f_1(x)f_2(y) = x_1y_2 - 3x_1y_3 - 2x_2y_2 + 6x_2y_3 + x_3y_2 - 3x_3y_3.$$

1. Montrer que Ψ est une forme bilinéaire.

   Solution. *Soient $x_1, x_2, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On calcule*

$$\begin{aligned}\Psi(x_1 + \lambda x_2, y) &= f_1(x_1 + \lambda x_2) f_2(y) \\ &= \big(f_1(x_1) + \lambda f(x_2)\big) f_2(y) \quad \text{puisque } f_1 \text{ est linéaire} \\ &= f_1(x_1) f_2(y) + \lambda f_1(x_2) f_2(y) \\ &= \Phi(x_1, y) + \lambda \Psi(x_2, y)\end{aligned}$$

   et donc Ψ est linéaire par rapport à sa première variable. On montre de même que Ψ est linéaire par rapport à sa deuxième variable. Puisque, par construction, Ψ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, on en conclut que Ψ est une forme bilinéaire.

   On peut aussi calculer

$$\begin{aligned}\Psi(x, y) &= x_1(y_2 - 3y_3) + x_2(-2y_2 + 6y_3) + x_3(y_2 - 3y_3) \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_2 - 3y_3 \\ -2y_2 + 6y_3 \\ y_2 - 3y_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

   Ce qui montre que Ψ est un forme bilinéaire et donne sa matrice B sur la base canonique.

2. La forme bilinéaire Ψ est-elle symétrique ? alternée ?

   Solution. *On peut voir directement ou en utilisant la matrice B que Ψ n'est ni symétrique, ni alternée.*

3. On définit la forme bilinéaire symétrique Φ par

$$\Phi(x, y) = \Psi(x, y) + \Psi(y, x).$$

   (a) Calculer la matrice A de Φ dans la base canonique.

   Solution. *La matrice de la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \Psi(y, x)$ dans la base canonique est ${}^tB$ et donc la matrice A est donnée par*

$$A = B + {}^tB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ -3 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

   On peut aussi trouver cette matrice en calculant explicitement l'expression de Φ et en utilisant la méthode usuelle.

   (b) Calculer le rang de Φ.

   Solution. *Par définition, le rang de Φ est égal au rang de la matrice A. Pour déterminer le rang de A, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss pour la mettre sous forme triangulaire supérieure. On peut aussi faire le raisonnement suivant : on trouve que $\det A = 0$ donc le rang de A est < 3. Or il est clair que les deux premières lignes de A sont indépendantes, donc le rang de A est 2.*

(c) Calculer $\operatorname{Ker} f_1$, $\operatorname{Ker} f_2$ et $\operatorname{Ker} \Phi$. Vérifier que $\operatorname{Ker} \Phi = \operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2$.

<u>Solution.</u> *On a* $x \in \operatorname{Ker} f_1$ *ssi* $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ *donc* $\operatorname{Ker} f_1$ *est de dimension* 2 *avec pour base* $\left({}^t(1,0,-1), {}^t(0,1,2)\right)$ *par exemple.*

On a $x \in \operatorname{Ker} f_2$ *ssi* $x_2 - x_3 = 0$ *donc* $\operatorname{Ker} f_2$ *est de dimension* 2 *avec pour base* $\left({}^t(1,0,0), {}^t(0,3,1)\right)$ *par exemple.*

On a $x \in \operatorname{Ker} \Phi$ *ssi*

$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ -3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Donc $\dim \operatorname{Ker} \Phi = 1$ *avec pour base* $\left({}^t(5,3,1)\right)$ *par exemple.*

On remarque que $f_1({}^t(5,3,1)) = f_2({}^t(5,3,1)) = 0$ *et donc ce vecteur est dans* $\operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2$ *et donc on a* $\operatorname{Ker} \Phi \subseteq \operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2$. *Puisque* $\operatorname{Ker} f_1 \neq \operatorname{Ker} f_2$, *donc* $\dim(\operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2) < 2$ *et donc finalement* $\dim \operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2 = 1$ *et il est égal* à $\operatorname{Ker} \Phi$.

(d) On considère le sous-espace vectoriel

$$H = \left\{ {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Calculer la dimension et une base de H.

<u>Solution.</u> *On a* $\dim H = 2$ *avec pour base* $\left({}^t(1,0,-1), {}^t(0,1,2)\right)$ *par exemple. On remarque que* $H = \operatorname{Ker} f_1$.

(e) Calculer l'orthogonal de H pour la forme Φ.

<u>Solution.</u> *On note* $e_1 = {}^t(1,0,-1)$ *et* $e_2 = {}^t(0,1,2)$ *les vecteurs de la base de* H *calculés à la question précédente. On sait que* $x \in H^\perp$ *ssi* $x \perp e_1$ *et* $x \perp e_2$. *On a* $x \perp e_1$ *ssi* $3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0$ *et* $x \perp e_2$ *ssi* $-5x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 0$. *Donc on a* $x \in H^\perp$ *ssi*

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ -5x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

On a donc $H^\perp = H$.

On peut aussi trouver ce résultat directement de la manière suivante : On a $x \in H^\perp$ *ssi pour tout* $y \in H$, $\Phi(x,y) = 0$, *mais comme* $H = \operatorname{Ker} f_1$, *cela donne*

$$\Phi(x,y) = f_1(x) f_2(y) = 0, \qquad \forall y \in H.$$

En prenant y *tel que* $f_2(y) \neq 0$ *(ce qui est possible car* $H = \operatorname{Ker} f_1 \neq \operatorname{Ker} f_2$ *par la question 3(c)), on trouve que* $x \in H^\perp$ *ssi* $f_1(x) = 0$ *ssi* $x \in \operatorname{Ker} f_1 = H$, *donc* $H^\perp = H$.