CC2 – Mercredi 5 avril - 11h30 - 13h

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Une grande importance sera accordée à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités.
3. Pour chaque valeur propre de A, trouver les vecteurs propres associés.
4. Montrer que A est diagonalisable.
5. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que
$$A = PDP^{-1}.$$
6. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, le coefficient $(1,1)$ de la matrice A^n est 3^n.

Exercice 2. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les deux formes linéaires

$$f_1(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 \quad \text{et} \quad f_2(x) = x_2 - 3x_3$$

pour $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$\Psi(x,y) = f_1(x)f_2(y) = x_1y_2 - 3x_1y_3 - 2x_2y_2 + 6x_2y_3 + x_3y_2 - 3x_3y_3.$$

1. Montrer que Ψ est une forme bilinéaire.
2. La forme bilinéaire Ψ est-elle symétrique ? alternée ?
3. On définit la forme bilinéaire symétrique Φ par
$$\Phi(x,y) = \Psi(x,y) + \Psi(y,x).$$
   (a) Calculer la matrice A de Φ dans la base canonique.
   (b) Calculer le rang de Φ.
   (c) Calculer $\operatorname{Ker} f_1$, $\operatorname{Ker} f_2$ et $\operatorname{Ker} \Phi$. Vérifier que $\operatorname{Ker} \Phi = \operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2$.
   (d) On considère le sous-espace vectoriel
   $$H = \left\{ {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$
   Calculer la dimension et une base de H.
   (e) Calculer l'orthogonal de H pour la forme Φ.