Contrôle Continu 2 – Correction

Nom :

Prénom :

Exercice 1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -5 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

   Solution. $T^3 + 4T^2 - T - 4$.

2. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

   Solution. *Valeurs propres* $-1, 1, 4$ *de multiplicité* 1

3. Pour chaque valeur propre de A, déterminer le sous-espace propre associé. En déduire que A est diagonalisable.

   Solution.

4. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

   Solution.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(x, y) = 3x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 - 3x_2y_2 + 2x_2y_3 - 3x_3y_1 - 2x_3y_2 - 2x_3y_3$$

avec $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ et $y = {}^t(y_1, y_2, y_3)$.

1. Montrer que Φ est une forme bilinéaire. Calculer sa matrice sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   <u>*Solution.*</u>
   $$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer une forme bilinéaire symétrique Φ_s et une forme bilinéaire alternée Φ_a telles que
   $$\Phi = \Phi_s + \Phi_a.$$

   <u>*Solution.*</u>
   $\Phi_s(x, y) = 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 - x_3y_1 - 2x_3y_3$
   $\Phi_a(x, y) = x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_3 - 2x_3y_1 - 2x_3y_2.$

3. Calculer le noyau de Φ_s et le noyau de Φ_a.

   <u>*Solution.*</u>
   $\ker(\Phi_s) = \{0\}$
   $\ker(\Phi_a) = \mathrm{Vec}\left({}^t(2, -2, 1)\right).$

4. Soit $x \in \ker \Phi_s \cap \ker \Phi_a$. Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}^3$, on a
   $$\Phi(x, y) = \Phi(y, x) = 0.$$

   <u>*Solution.*</u>
   $$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}\left(\Phi_s(x, y) + \Phi_a(x, y)\right) = 0$$
   car $x \in \ker \Phi_s \cap \ker \Phi_a$. *De même, pour* $\Phi(y, x)$.