CC3 – Lundi 29 avril 2019 - 14h-16h

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Une grande importance sera accordée à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les deux formes linéaires

$$f_1(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 \quad \text{et} \quad f_2(x) = x_2 - 3x_3$$

pour $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$\Phi(x, y) = f_1(x) f_2(y).$$

1. Montrer que Φ est une forme bilinéaire.
2. La forme bilinéaire Φ est-elle symétrique ? alternée ?

On note q la forme quadratique associée à Φ. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note A_1 et A_2 respectivement les matrices de f_1 et f_2 sur cette base.

3. Calculer les matrices A_1 et A_2, puis la matrice de Φ sur la base $\mathcal{B}$. Existe-t-il un lien entre ces trois matrices ?
4. Calculer la matrice de q sur la base $\mathcal{B}$.
5. Calculer les dimensions et des bases pour $\mathrm{Ker}(f_1)$ et $\mathrm{Ker}(f_2)$.
6. Montrer que le cône isotrope $C(q)$ de q vérifie $C(q) = \mathrm{Ker}(f_1) \cup \mathrm{Ker}(f_2)$. Est-ce un sous-espace vectoriel ? (Justifier votre réponse.)
7. Montrer que $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2)$.

Exercice 2. Pour $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, on considère la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 5x_4^2.$$

1. Calculer une décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

2. Quelle est la signature de q ? Quel est le rang de q ?
3. Calculer une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$ orthogonale pour q.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^4$. On écrit $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. Donner l'expression de $q(x)$ en fonction des λ_i.

Exercice 3. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire classique et deux vecteurs bien choisis, montrer que

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?