

UNIVERSITÉ LYON I

# DIAGONALISATION ET ALGÈBRE BILINÉAIRE

---

**Programme.**

1. Algèbre linéaire. Rappels sur les espaces vectoriels et les matrices. Déterminant et trace. Valeurs propres, vecteurs propres, polynôme caractéristique. Théorème de Cayley-Hamilton, polynôme minimal. Diagonalisation des matrices. Puissances d'une matrice, exponentielle de matrices.
  2. Algèbre bilinéaire. Formes bilinéaires, orthogonalité, formes quadratiques, réduction de Gauss, signature, théorème de Sylvester. Produits scalaires, espaces vectoriels euclidiens. Réduction des matrices symétriques réelles.
-

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Algèbre linéaire</b>	<b>4</b>
1.1	Rappels sur les espaces vectoriels . . . . .	4
1.2	Rappels sur les matrices . . . . .	7
1.2.1	Premières définitions . . . . .	7
1.2.2	Produit de matrices . . . . .	8
1.2.3	Image, noyau et rang d'une matrice . . . . .	9
1.2.4	Systèmes d'équations linéaires homogènes . . . . .	9
1.2.5	Matrice d'une application linéaire . . . . .	10
1.2.6	Matrice de passage . . . . .	10
1.2.7	Trace d'une matrice . . . . .	11
1.3	Déterminant . . . . .	12
1.3.1	Définition par récurrence . . . . .	12
1.3.2	Premières propriétés du déterminant . . . . .	13
1.3.3	Déterminants et bases . . . . .	14
1.3.4	Déterminant d'un produit de matrices . . . . .	15
1.3.5	Calculs du déterminant . . . . .	16
1.3.6	Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	17
1.4	Valeurs propres et vecteurs propres . . . . .	18
1.4.1	Premières définitions . . . . .	18
1.4.2	Rappels sur les polynômes . . . . .	19
1.4.3	Polynôme caractéristique . . . . .	20
1.4.4	Polynôme minimal et théorème de Cayley-Hamilton . . . . .	21
1.4.5	Valeurs propres d'un endomorphisme . . . . .	22
1.5	Diagonalisation . . . . .	22
1.5.1	Problème de la diagonalisation . . . . .	22
1.5.2	Caractérisation des matrices diagonalisables . . . . .	23
1.5.3	Méthode de diagonalisation . . . . .	24
1.5.4	Applications de la diagonalisation des matrices . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Algèbre bilinéaire</b>	<b>29</b>
2.1	Formes bilinéaires . . . . .	29
2.1.1	Définitions . . . . .	29
2.1.2	Formes bilinéaires symétriques ou alternées . . . . .	30
2.1.3	Noyau et rang des formes bilinéaires symétriques ou alternées . . . . .	31
2.2	Orthogonalité . . . . .	33

2.2.1	Orthogonal d'un sous-espace vectoriel . . . . .	34
2.3	Formes quadratiques . . . . .	35
2.3.1	Premières définitions . . . . .	35
2.3.2	Autres invariants d'une forme quadratique . . . . .	38
2.4	Réduction des formes quadratiques . . . . .	38
2.4.1	Bases duales et contraduales . . . . .	38
2.4.2	Formulations du problème . . . . .	40
2.4.3	Réduction de Gauss . . . . .	41
2.4.4	Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ . . . . .	45
2.5	Espaces euclidiens . . . . .	47
2.5.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	47
2.5.2	Définitions et premières propriétés . . . . .	48

# Notations

Par la suite  $\mathbb{K}$  désigne le corps des nombres rationnels  $\mathbb{Q}$ , le corps des nombres réels  $\mathbb{R}$  ou le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . (La plupart des résultats restent cependant valides pour des corps plus généraux.)

Les vecteurs de l'espace vectoriel  $\mathbb{K}^n$  sont notés en colonne, par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

On dénote par  $(u_1, \dots, u_n)$  la famille composée des vecteurs  $u_1, \dots, u_n$ . Ainsi, la famille

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $A$  une matrice ou un vecteur, on note  ${}^tA$  la transposée de  $A$ . Par exemple :

$${}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Notons que la transposée d'un vecteur ligne est un vecteur colonne.

# Chapitre 1

## Algèbre linéaire

### 1.1 Rappels sur les espaces vectoriels

Le but de cette section est de rappeler très brièvement les résultats les plus importants sur les espaces vectoriels. Cependant, tous les résultats et définitions utilisés par la suite ne sont pas inclus et il sera sans doute nécessaire de se reporter aux notes des cours précédents.

Un **espace vectoriel**  $E$  sur le corps  $\mathbb{K}$  est un ensemble  $E$  non vide muni d'une opération interne  $(x, y) \mapsto x + y$  de  $E \times E$  dans  $E$  et d'une opération externe  $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$  de  $\mathbb{K} \times E$  dans  $E$  satisfaisant les conditions suivantes :

1. pour tous  $x, y, z \in E$ ,  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ,
2. pour tous  $x, y \in E$ ,  $x + y = y + x$ ,
3. il existe  $0_E \in E$  tel que, pour tout  $x \in E$ ,  $x + 0_E = x$ ,
4. pour tout  $x \in E$ , il existe un élément noté  $-x \in E$  tel que  $x + (-x) = 0_E$ ,
5. pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et tout  $x \in E$ ,  $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$ ,
6. pour tout  $x \in E$ ,  $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$ ,
7. pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et tout  $x \in E$ ,  $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ ,
8. pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et tous  $x, y \in E$ ,  $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ .

**Remarque.** En général, on écrira  $0$  à la place de  $0_E$  quand le contexte est clair pour alléger les formules. Attention, cependant, cela signifie donc que le symbole  $0$  désigne des objets *différents* suivant le contexte.

De même, on écrira en général l'opération interne sous la forme  $\lambda x$  au lieu de  $\lambda \cdot x$ .

On peut montrer que  $0 \cdot x = 0$  et  $-1 \cdot x = -x$ .

#### Exemples.

1. Le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  avec l'addition des vecteurs et la multiplication des vecteurs par un nombre réel est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. L'ensemble  $\mathcal{F}$  des fonctions de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$  muni des opérations  $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$  et  $\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda f(x)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
3. Le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  si  $F$  vérifie les propriétés suivantes :

1.  $F$  est non vide (note :  $F$  doit contenir  $0_E$ );
2. pour tous  $x, y \in F$ , on a  $x + y \in F$  (stable pour l'addition);
3. pour tout  $x \in F$  et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a  $\lambda x \in F$  (stable pour la multiplication).

Notons qu'un sous-espace vectoriel est en particulier un espace vectoriel.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $(x_1, \dots, x_s)$  une famille finie d'éléments de  $E$ . On note  $\text{Vec}(x_1, \dots, x_s)$  le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de cette famille. On peut montrer que  $\text{Vec}(x_1, \dots, x_s)$  est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires des  $x_1, \dots, x_s$ , c'est-à-dire

$$\text{Vec}(x_1, \dots, x_n) = \{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K} \}.$$

La famille est **libre** s'il n'existe pas de relation non triviale entre les éléments de la famille. En d'autres termes, si la seule solution de l'équation :

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s = 0_E$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ , est la solution évidente  $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$ .

La famille est **génératrice** si tout élément de  $E$  peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de la famille. C'est-à-dire si, pour tout  $x \in E$ , il existe  $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{K}$ , tels que :

$$x = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_s.$$

Par définition,  $(x_1, \dots, x_s)$  est une famille génératrice de  $E$  si et seulement si  $E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_s)$ . Une famille est une **base** si elle est à la fois libre et génératrice.

Un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une base finie ou de manière équivalente s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, l'espace vectoriel est de **dimension infinie**. Parmi les exemples donnés ci-dessus, seul l'exemple 2 est de dimension infinie.

*Les espaces vectoriels considérés dans ce cours sont de dimension finie, à moins que le contraire ne soit explicitement mentionné.*

**Proposition 1.1.** *Supposons que  $E$  est de dimension fini et soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors :*

1. *Le cardinal  $n$  de la base  $\mathcal{B}$  est indépendant du choix de la base, on l'appelle la **dimension** de  $E$  et on note  $\dim(E)$ .*
2. *Toute famille libre de  $E$  a au plus  $n$  éléments et une famille libre a  $n$  éléments si et seulement si c'est une base.*
3. *Toute famille génératrice de  $E$  a au moins  $n$  éléments et une famille génératrice a  $n$  éléments si et seulement si c'est une base.*
4. *Pour tout  $x \in E$ , la décomposition :*

$$x = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$$

est unique.

On appelle vecteur représentant  $x$  sur la base  $\mathcal{B}$ , le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

5. L'espace vectoriel  $E$  est isomorphe à l'espace vectoriel  $\mathbb{K}^n$  par l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\rightarrow E \\ {}^t(\mu_1, \dots, \mu_n) &\mapsto \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n. \end{aligned} \quad \square$$

Notons qu'une famille  $(x_1, \dots, x_s)$  est libre si et seulement si  $\dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_s) = s$ .

On note  $F$  un autre  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une fonction  $\varphi$  de  $E$  dans  $F$  est une **application linéaire** si elle vérifie :

- pour tout  $x, y \in E$ ,  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ,
- pour tout  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ .

On appelle **noyau** de  $\varphi$  l'ensemble des éléments de  $E$  dont l'image par  $\varphi$  est  $0_F$ , on note :

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in E \text{ tel que } \varphi(x) = 0_F\}.$$

On appelle **image** de  $\varphi$  l'ensemble formé des images par  $\varphi$  des éléments de  $E$ , on note :

$$\text{Im } \varphi = \{\varphi(x) \text{ pour } x \in E\}.$$

Une application linéaire injective et surjective est un **isomorphisme** (entre espaces vectoriels). Une conséquence du théorème du rang (cf. ci-dessous) est que deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension. On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ . On note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $E$ , on appelle ces applications linéaires des **endomorphismes**.

**Proposition 1.2.** Soit  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Alors, l'application  $\varphi$  vérifie aussi :

- $\varphi(0_E) = 0_F$ ,
- $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ .

De plus,  $\text{Ker } \varphi$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\text{Im } \varphi$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ . L'application  $\varphi$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$  et  $\varphi$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(\varphi) = F$ .

On a aussi l'égalité :

$$\dim E = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi.$$

On appelle **rang** de  $\varphi$  la dimension de  $\text{Im } \varphi$  ; ainsi l'égalité précédente est connue sous le nom de "théorème du rang".

L'ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel. Si  $E$  est de dimension finie  $n$  et  $F$  de dimension finie  $m$ , alors l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  est isomorphe (après le choix d'une base de  $E$  et d'une base de  $F$ ) à l'espace vectoriel  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$  des matrices  $m \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , en particulier c'est un espace vectoriel de dimension  $mn$ .  $\square$

Une **forme linéaire** est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  (avec  $\mathbb{K}$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1). L'ensemble des formes linéaires de  $E$  est appelé le **dual d'un espace vectoriel** de  $E$  et est dénoté  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ , c'est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour  $u \in E^*$ , on a par le théorème du rang que : ou bien  $u = 0$  (application linéaire), ou bien  $u$  est surjective.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soient  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $E = F \oplus G$ ,  $E$  est la **somme directe** de  $F$  et  $G$  si l'une des trois propriétés équivalentes est vérifiée :

1.  $F \cap G = \{0\}$  et  $E = F + G$ ,
2.  $F \cap G = \{0\}$  et  $\dim E = \dim F + \dim G$ ,
3.  $E = F + G$  et tout vecteur  $x \in E$  s'écrit de manière unique sous la forme  $x = y + z$  avec  $y \in F$  et  $z \in G$ .

## 1.2 Rappels sur les matrices

### 1.2.1 Premières définitions

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et soient  $n, m \geq 1$  deux entiers. Une **matrice** à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de type  $(n, m)$  est une famille  $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  de scalaires dans  $\mathbb{K}$ . La matrice  $(a_{i,j})$  (on omet les bornes quand il n'y a pas de risques de confusion) est dénotée par un tableau

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Remarque importante. le premier indice est la ligne, le deuxième indice est la colonne.

L'ensemble de matrices à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de type  $(n, m)$  est dénoté par  $M_{n,m}(\mathbb{K})$  ou par  $M_n(\mathbb{K})$  quand  $m = n$  (matrices carrées). On note  $\mathbf{I}_n$  la **matrice identité** dans  $M_n(\mathbb{K})$ .

**Théorème 1.3.** *L'ensemble  $M_{n,m}(\mathbb{K})$  est  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $nm$ . Une base de  $M_{n,m}(\mathbb{K})$  est la base des matrices élémentaires  $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  où  $E_{i,j}$  est la matrice avec tous les coefficients égaux à 0 sauf le coefficient  $(i, j)$  égal à 1.*

Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice carrée de type  $n$ . On dénote par  $(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$  la **diagonale** de  $A$ . La matrice  $A$  est une **matrice diagonale** si  $a_{i,j} = 0$  pour  $i \neq j$  et donc

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

La matrice  $A$  est **triangulaire supérieure**, resp. **triangulaire inférieure**, si tous les coefficients au-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nuls. La **transposée** de



la matrice  $A$ , dénotée  ${}^tA$ , est la matrice dont les coefficients sont  $a_{j,i}$  (symétrie par rapport à la diagonale). On dit que  $A$  est **symétrique** si  ${}^tA = A$  et **anti-symétrique** si  ${}^tA = -A$ . La transposition est un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{K})$ .

**Théorème 1.4.** *On note  $S_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $M_n(\mathbb{K})$  et  $A_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices anti-symétriques de  $M_n(\mathbb{K})$ . Alors,  $S_n(\mathbb{K})$  et  $A_n(\mathbb{K})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $M_n(\mathbb{K})$ . De plus, on a*

$$\dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2 + n}{2}, \quad \dim A_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2 - n}{2} \quad \text{et} \quad M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}).$$

### 1.2.2 Produit de matrices

Soient  $A = (a_{i,j})$  une matrice de type  $(n, m)$  et  $B = (b_{i,j})$  une matrice de type  $(m, p)$ , on définit la matrice produit  $C = AB$  de type  $(n, p)$  par  $C = (c_{i,j})$  où

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j}$$

**Proposition 1.5.** *La produit de matrices vérifie les propriétés suivantes :*

1. Pour  $A, B$  et  $C$  trois matrices compatibles, on a  $A(BC) = (AB)C$ .
2. Pour  $A$  de type  $(n, m)$ , on a  $A\mathbf{I}_m = \mathbf{I}_n A = A$ .
3. Pour  $A, B, C$  et  $D$  matrices compatibles, on a

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{et} \quad (B + C)D = BD + CD.$$

4. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices compatibles, on a  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ .

Soit  $A$  une matrice carrée de type  $n$ . On dit que  $A$  est **nilpotente** si il existe un entier  $k \geq 1$  tel que  $A^k = 0$  (matrice nulle). Le plus petit entier  $k \geq 1$  tel que  $A^k = 0$  est l'**indice de nilpotence** de  $A$ . On dit que  $A$  est **inversible** si il existe une matrice carrée  $B$  de type  $n$  telle que  $AB = BA = \mathbf{I}_n$ . On note  $A^{-1}$  l'inverse. On dénote par  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices inversibles de type  $n$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont **semblables** si il existe une matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

On dit que  $A$  et  $B$  sont **équivalentes** si il existe deux matrices  $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que

$$B = QAP.$$

Les relations “semblable” et “équivalente” sont des relations d'équivalence. Deux matrices semblables sont équivalentes (mais le contraire est faux en général).

### 1.2.3 Image, noyau et rang d'une matrice

Soit  $A$  une matrice de  $M_{n,m}(\mathbb{K})$ . On définit

$$\begin{aligned}\text{Im}(A) &= \{Ax \text{ avec } x \in \mathbb{K}^m\} \\ \text{Ker}(A) &= \{x \in \mathbb{K}^m \text{ tel que } Ax = 0\}\end{aligned}$$

**Proposition 1.6.** *L'image  $\text{Im}(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  et le noyau  $\text{Ker}(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^m$ .*

On définit le **rang** de  $A$  par  $\text{rang}(A) = \dim \text{Im}(A)$ . On a

**Théorème 1.7.** *On a*

1.  $\text{rang}(A) \leq \min(n, m)$ ,
2.  $\text{rang}(A) = \text{rang}({}^t A)$ ,
3.  $\text{Ker}(A) = \{0\}$  si et seulement si  $\text{rang}(A) = m$ ,
4.  $\text{Ker}({}^t A) = \{0\}$  si et seulement si  $\text{rang}(A) = n$ ,
5.  $\text{rang}(A) + \dim \text{Ker}(A) = m$ .

*De plus, deux matrices de  $M_n(\mathbb{K})$  équivalentes si et seulement si elles sont même rang.*

### 1.2.4 Systèmes d'équations linéaires homogènes

Un système de  $m$  équations linéaires homogènes en  $n$  variables est un système d'équations de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

où les inconnues sont  $x_1, \dots, x_n$  et les coefficients  $a_{i,j}$  sont dans  $\mathbb{K}$ . On peut aussi réécrire ce système sous la forme

$$AX = 0$$

où  $A = (a_{i,j})$  et  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ . Il suit que l'ensemble des solutions de  $(S)$  est égal au noyau de la matrice  $A$ . Par le théorème du rang, le noyau est de dimension  $n - \text{rang}(A)$ .

On dit que le système est **échelonné** si  $a_{i,j} = 0$  pour  $i > j$ , c'est-à-dire de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \quad a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \quad \quad a_{3,3}x_3 + \dots + a_{3,n}x_n = 0 \\ \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad a_{m,n}x_n = 0 \end{cases} .$$

On suppose de plus que chaque ligne contient au moins un coefficient non nul. Dans ce cas, il est facile de voir que le rang de la matrice correspondante est  $m$ . On en déduit le résultat suivant

**Proposition 1.8.** *L'ensemble des solutions d'un système échelonné de  $m$  équations linéaires homogènes non nulles en  $n$  variables est un espace vectoriel de dimension  $n - m$ .*

### 1.2.5 Matrice d'une application linéaire

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension respectives  $n$  et  $m$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et soit  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$  une base de  $F$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On associe à  $\varphi$  respectivement au base  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  une matrice  $(a_{i,j})$  de type  $(m, n)$  avec

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= a_{1,1}f_1 + a_{2,1}f_2 + \dots + a_{m,1}f_m \\ \varphi(e_2) &= a_{1,2}f_1 + a_{2,2}f_2 + \dots + a_{m,2}f_m \\ &\dots \\ \varphi(e_n) &= a_{1,n}f_1 + a_{2,n}f_2 + \dots + a_{m,n}f_m\end{aligned}$$

C'est la **matrice de  $\varphi$  respectivement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$** . Si  $\varphi : E \rightarrow E$  est un endomorphisme, on prend en général  $\mathcal{C} = \mathcal{B}$  et on parle de la matrice de  $\varphi$  respectivement à la base  $\mathcal{B}$ .

**Théorème 1.9.** *L'application  $\varphi \mapsto A$  où  $A$  est la matrice de  $\varphi$  respectivement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  est un isomorphisme d'espace vectoriels. En particulier, on a  $\dim \mathcal{L}(E, F) = nm$ .*

Soient  $x \in E$  et  $y = \varphi(x)$ . Notons  $X$  le vecteur représentant  $x$  sur la base  $\mathcal{B}$  et  $Y$  le vecteur représentant  $y$  sur la base  $\mathcal{C}$ . Alors, on a  $Y = AX$  où  $A$  est la matrice de  $\varphi$  respectivement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

**Proposition 1.10.** *Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et soit  $A$  la matrice de  $\varphi$  respectivement à la base  $\mathcal{B}$ . Alors,  $\varphi$  est bijective si et seulement si la matrice  $A$  est inversible. Dans ce cas, la matrice de  $\varphi^{-1}$  respectivement à la base  $\mathcal{B}$  est  $A^{-1}$ .*

### 1.2.6 Matrice de passage

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . La **matrice de passage** de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est la matrice de l'identité respectivement aux bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$  (attention à l'inversion!), c'est-à-dire la matrice des vecteurs représentants  $e'_1, \dots, e'_n$  sur la base  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 1.11.** *Soit  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .*

1.  $P$  est inversible et  $P^{-1}$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}'$  à la base  $\mathcal{B}$ ,
2. Pour  $x \in E$ , on dénote par  $X$  et  $X'$  les vecteurs représentant  $x$  sur les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  respectivement. On a  $X = PX'$ .

**Théorème 1.12** (Changement de base). *Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Soit  $\varphi : E \rightarrow F$  une application linéaire. Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ . On pose*

- $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ ,
- $Q$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{C}$  à la base  $\mathcal{C}'$ ,
- $A$  la matrice de  $\varphi$  respectivement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ ,
- $A'$  la matrice de  $\varphi$  respectivement aux bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}'$ .

Alors, on a

$$A' = Q^{-1}AP.$$

( $A$  et  $A'$  sont équivalentes.)

En particulier, si  $\varphi : E \rightarrow E$  est un endomorphisme et  $M$  est la matrice de  $\varphi$  respectivement à la bases  $\mathcal{B}$  et  $M'$  est la matrice de  $u$  respectivement à la bases  $\mathcal{B}'$ , on a

$$M' = P^{-1}MP.$$

( $M$  et  $M'$  sont semblables.)

### 1.2.7 Trace d'une matrice

La **trace** d'une matrice carrée est la somme des termes de sa diagonale, c'est-à-dire si  $A = (a_{i,j})$ , on a

$$\text{Tr}(A) = \sum_i a_{i,i}.$$

**Proposition 1.13.** *L'application  $\text{Tr} : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme linéaire (non nulle) vérifiant, pour tous  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$*

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

*En particulier, deux matrices semblables ont la même trace.*

*Démonstration.* Il est direct de voir que  $\text{Tr}$  est une application linéaire puisque  $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$  et  $\text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A)$  pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ . C'est une forme linéaire puisque son espace d'arrivée est  $\mathbb{K}$  et elle est non nulle puisque  $\text{Tr}(\mathbf{I}_n) = n \neq 0$ .

Maintenant, notons  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$ . D'un côté, on a  $C = AB$  la matrice dont les coefficients  $c_{i,j}$  sont donnés par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}.$$

Il suit que

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,i}.$$

D'un autre côté, on a  $D = BA$  la matrice dont les coefficients  $d_{i,j}$  sont donnés par

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k}a_{k,j}.$$

Il suit que

$$\text{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^n d_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k}a_{k,i}$$

et on a bien  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .

Pour finir, soient  $A$  et  $B$  deux matrices semblables, disons  $B = P^{-1}AP$  avec  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . On calcule

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(APP^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(B). \quad \square$$

Pour  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme, on définit la **trace** de  $\varphi$  comme la trace de la matrice de  $\varphi$  respectivement à une base arbitraire de  $E$ . Par le résultat précédent, cette trace ne dépend pas du choix de cette base.

## 1.3 Déterminant

### 1.3.1 Définition par récurrence

Soit  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ . Pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , on dénote par  $A_{i,j}$  la matrice de  $M_{n-1}(\mathbb{K})$  obtenue en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

**Exemple.** On pose

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a alors par exemple

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{3,3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On définit par récurrence la fonction **déterminant**  $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  par

- $\det A = a_{1,1}$  pour  $n = 1$ ,
- $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A_{1,j}$  pour  $n \geq 2$ .

On utilise aussi la notation suivante pour le déterminant :

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

**Exemples.** On a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \\ + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$$

**Proposition 1.14.** *Supposons que  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est une matrice diagonale ou une matrice triangulaire supérieure ou une matrice triangulaire inférieure. Alors le déterminant de  $A$  est le produit de ses termes diagonaux.*

*En particulier, le déterminant de la matrice identité  $\mathbf{I}_n$  est 1.*

*Démonstration.* On montre le résultat dans le cas triangulaire inférieur (ce qui implique le cas diagonal). Le cas triangulaire supérieur est similaire (on suit de la formule  $\det(A) = \det({}^t A)$  donnée plus tard). On procède par récurrence. Pour  $n = 1$ , le résultat est direct. Supposons que  $n \geq 1$  est tel que le résultat est vrai pour toutes les matrices triangulaires inférieures de type  $n - 1$ . Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice triangulaire inférieure de type  $n + 1$ , on a donc  $a_{i,j} = 0$  si  $i < j$ . On a

$$\det A = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A_{1,j} = a_{1,1} \det A_{1,1}.$$

Mais  $A_{1,1} = (a_{i+1,j+1})$  est une matrice triangulaire inférieure et donc  $\det A_{1,1} = a_{2,2} \cdots a_{n+1,n+1}$  par récurrence. Ainsi, on a bien

$$\det A = a_{1,1} \cdots a_{n+1,n+1}$$

et le résultat est démontré. □

### 1.3.2 Premières propriétés du déterminant

Soit  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ , on dénote par  $(v_1 | \cdots | v_n)$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$ . On appelle **déterminant** de la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  le déterminant de la matrice  $(v_1 | \cdots | v_n)$ .

**Proposition 1.15.** *Le déterminant d'une matrice est une application linéaire par rapport à chacune de ses colonnes, c'est-à-dire pour  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$  et pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a*

1. Pour tout  $u \in \mathbb{K}^n$

$$\det(v_1 | \cdots | v_k + u | \cdots | v_n) = \det(v_1 | \cdots | v_k | \cdots | v_n) + \det(v_1 | \cdots | u | \cdots | v_n),$$

2. Si  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\det(v_1 | \cdots | \lambda v_k | \cdots | v_n) = \lambda \det(v_1 | \cdots | v_k | \cdots | v_n).$$

*Démonstration.* On démontre le résultat pour 2. La démonstration pour 1 est similaire. On montre le résultat par récurrence sur  $n$ . C'est évident pour  $n = 1$ . Supposons que  $n \geq 1$  est tel que le résultat est vrai pour toutes les matrices de type  $n$ , c'est-à-dire quand on multiplie une colonne par  $\lambda$  alors le déterminant est aussi multiplié par  $\lambda$ . Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice de type  $n + 1$  et soit  $A' = (a'_{i,j})$  avec  $a'_{i,j} = a_{i,j}$  si  $j \neq k$  et  $a'_{i,k} = \lambda a_{i,k}$  (donc la colonne  $j$  est multipliée par  $\lambda$ ). On calcule

$$\begin{aligned} \det A' &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} a'_{1,j} \det A'_{1,j} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A'_{1,j} + (-1)^{k+1} \lambda a_{1,k} \det A'_{1,k}. \end{aligned}$$

La matrice  $A'_{1,j}$  est une matrice de type  $n$  égale à la matrice  $A_{1,j}$  avec une colonne multipliée par  $\lambda$ , on a donc par récurrence  $\det A'_{1,j} = \lambda \det A_{1,j}$ . Puisque la matrice  $A'_{1,k}$  ne contient pas la colonne  $k$ , elle est égale à  $A_{1,k}$ . On a donc

$$\begin{aligned} \det A' &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} (-1)^{j+1} a_{1,j} \lambda \det A_{1,j} + (-1)^{k+1} \lambda a_{1,k} \det A_{1,k} \\ &= \lambda \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A_{1,j} + (-1)^{k+1} a_{1,k} \det A_{1,k} \right) \\ &= \lambda \det A. \end{aligned} \quad \square$$

**Proposition 1.16.** *Le déterminant d'une matrice est alterné par rapport à ses colonnes, c'est-à-dire si  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$  et  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  avec  $j < k$ , on a*

$$\det(v_1 | \dots | v_j | \dots | v_k | \dots | v_n) = -\det(v_1 | \dots | v_k | \dots | v_j | \dots | v_n).$$

*En particulier, si deux colonnes d'une matrice sont égales alors son déterminant est nul.*

*Démonstration.* On démontre uniquement le deuxième point (le premier point se prouve par récurrence comme ci-dessus). Supposons que  $v_j = v_k$ , alors on a

$$\begin{aligned} \det(v_1 | \dots | v_j | \dots | v_k | \dots | v_n) &= -\det(v_1 | \dots | v_k | \dots | v_j | \dots | v_n) \\ &= -\det(v_1 | \dots | v_j | \dots | v_k | \dots | v_n) \end{aligned}$$

et donc  $\det(v_1 | \dots | v_j | \dots | v_k | \dots | v_n) = 0$ . □

Les résultats sur les colonnes sont aussi vrais pour les lignes grâce au résultat suivant.

**Proposition 1.17.** *Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on a  $\det(A) = \det({}^t A)$ . En particulier, on a*

- *le déterminant d'une matrice est une application linéaire par rapport à chaque ligne,*
- *le déterminant d'une matrice dont deux lignes sont égales est nul,*
- *le déterminant change de signe quand on échange deux lignes d'une matrice,*

### 1.3.3 Déterminants et bases

**Théorème 1.18.** *Soit  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ . Alors, la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  si et seulement si le déterminant de la matrice  $(v_1 | \dots | v_n)$  est non nul.*

*Plus généralement, soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Soit  $x_1, \dots, x_n$  des vecteurs de  $E$  et soient  $X_1, \dots, X_n$  les vecteurs représentant respectivement  $x_1, \dots, x_n$  sur la base  $\mathcal{B}$ . Alors, la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $E$  si et seulement si le déterminant de la matrice  $(X_1 | \dots | X_n)$  est non nul.*

*Démonstration.* On démontre le premier résultat. Supposons pour que la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  n'est pas une base. On montre que  $\det(v_1 | \dots | v_n) = 0$ . Puisque la famille maximale

$(v_1, \dots, v_n)$  n'est pas une base, elle est liée. Donc il existe une relation, disons par exemple

$$v_1 = \sum_{j=2}^n \lambda_j v_j.$$

On a

$$\begin{aligned} \det(v_1 | \dots | v_n) &= \det \left( \sum_{j=2}^n \lambda_j v_j | v_2 | \dots | v_n \right) \\ &= \sum_{j=2}^n \lambda_j \det(v_j | v_2 | \dots | v_n) = 0 \end{aligned}$$

puisque les déterminants sont tous nuls car il y a toujours au moins deux vecteurs égaux dans chaque déterminant de cette somme.

Maintenant, supposons que  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base. On montre par l'absurde que  $\det(v_1 | \dots | v_n) \neq 0$ . Supposons le contraire :  $\det(v_1 | \dots | v_n) = 0$ . Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille quelconque de vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ . Alors, on peut écrire les vecteurs  $u_j$  sur la base  $(v_1, \dots, v_n)$ , disons

$$u_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} v_i.$$

On calcule

$$\begin{aligned} \det(u_1 | \dots | u_n) &= \det \left( \sum_{i=1}^n \lambda_{i,1} v_i | \dots | \sum_{i=1}^n \lambda_{i,n} v_i \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \lambda_{i_1,1} \lambda_{i_2,2} \dots \lambda_{i_n,n} \det(v_{i_1} | v_{i_2} | \dots | v_{i_n}). \end{aligned}$$

Maintenant, considérons un des déterminants  $\det(v_{i_1} | v_{i_2} | \dots | v_{i_n})$  de cette dernière somme. Ou bien il existe  $k \neq \ell$  avec  $i_k = i_\ell$  et donc ce déterminant est nul ; ou bien tous les indices sont différents et donc, en réarrangeant les colonnes, ce déterminant est égal au signe près à  $\det(v_1 | \dots | v_n) = 0$ . Ainsi, on trouve que, pour toute famille  $(u_1, \dots, u_n)$ , on a  $\det(u_1 | \dots | u_n) = 0$ . Mais ceci est absurde car si on prend pour  $(u_1, \dots, u_n)$  la base canonique, on obtient la matrice identité  $\mathbf{I}_n$  et son déterminant est égal à 1.

Pour le deuxième point, on procède de la même façon si ce n'est qu'on prend pour la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  la base  $\mathcal{B}$ . On obtient alors la matrice des vecteurs représentant la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  sur la base  $(u_1, \dots, u_n)$  qui est aussi la matrice identité.  $\square$

### 1.3.4 Déterminant d'un produit de matrices

Le résultat principal est le suivant

**Théorème 1.19.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices dans  $M_n(\mathbb{K})$ . On a

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$



**Corollaire 1.20.** *Une matrice  $A$  dans  $M_n(\mathbb{K})$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ . On a alors  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $A$  est inversible, alors il existe une matrice  $A^{-1}$  telle que  $AA^{-1} = \mathbf{I}_n$ . On a alors  $\det(AA^{-1}) = \det(\mathbf{I}_n) = 1$ . Puisque  $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ , on en déduit que  $\det(A) \neq 0$  et  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .

Supposons à présent que  $\det(A) \neq 0$ . On montre que  $A$  est inversible. Supposons que  $A = (v_1 | \dots | v_n)$ . Alors, on sait que la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  et donc  $A$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $(v_1, \dots, v_n)$ ; elle est donc inversible.  $\square$

### 1.3.5 Calculs du déterminant

Soit  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ . Pour chaque coefficient  $a_{i,j}$  de  $A$ , on appelle **cofacteur** de  $a_{i,j}$  la quantité

$$\text{cofact}(a_{i,j}) = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

où, comme précédemment,  $A_{i,j}$  est la matrice de type  $n-1$  obtenue en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ . On a

**Proposition 1.21.** *Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a le développement du déterminant de  $A$  suivant la  $i$ -ième ligne*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \text{cofact}(a_{i,j}).$$

*De même, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on a le développement du déterminant de  $A$  suivant la  $j$ -ième colonne*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \text{cofact}(a_{i,j}).$$

Pour  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on définit la **comatrice** de  $A$  par

$$\text{Comat}(A) = (c_{i,j}) \quad \text{avec } c_{i,j} = \text{cofact}(a_{i,j}).$$

**Corollaire 1.22.** *Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on a*

$$A {}^t\text{Comat}(A) = {}^t\text{Comat}(A) A = \det(A) \mathbf{I}_n.$$

*En particulier, si  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , on a*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{Comat}(A).$$

Soit  $n \geq 1$  un entier. Une bijection  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  est appelé une **permutation** sur  $n$  lettres. L'ensemble des permutations sur  $n$  lettres est dénoté  $S_n$ ; c'est un groupe pour la composition.

**Proposition 1.23.** *Il existe une unique fonction surjective  $\text{sign} : S_n \rightarrow \{-1, +1\}$  telle que, pour tous  $\sigma, \pi \in S_n$ , on a*

$$\text{sign}(\sigma \circ \pi) = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\pi).$$

*On appelle cette fonction la **signature**.*

**Théorème 1.24.** *Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice carrée de type  $n$ . Alors, on a*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}.$$

**Proposition 1.25.** *Soient  $A, B$  et  $C$  trois matrices dans  $M_n(\mathbb{K})$  et soient  $M \in M_{2n}(\mathbb{K})$  telles que*

$$M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right).$$

*Alors, on a  $\det(M) = \det(A) \det(C)$ .*

### 1.3.6 Déterminant d'un endomorphisme

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  avec  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et soit  $A$  la matrice de  $\varphi$  respectivement à la base  $\mathcal{B}$ . On définit le **déterminant** de  $\varphi$  par  $\det(\varphi) = \det(A)$ .

**Proposition 1.26.** *Le déterminant de  $\varphi$  ne dépend pas du choix de base  $\mathcal{B}$ . De plus, les assertions suivantes sont équivalentes*

1.  $\det(\varphi) \neq 0$ ,
2.  $\varphi$  est injective,
3.  $\varphi$  est surjective,
4.  $\varphi$  est bijective,
5.  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ ,
6.  $\text{Im}(\varphi) = E$ ,
7.  $\text{rang}(\varphi) = \dim(E)$ .

*Démonstration.* On montre le premier point. Soit  $\mathcal{B}'$  une autre base de  $E$  et soit  $A'$  la matrice de  $\varphi$  respectivement à la base  $\mathcal{B}'$ . Alors, on a  $A' = P^{-1}AP$  où  $P$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ . Il suit

$$\det(A') = \det(P^{-1}AP) = \det(P)^{-1} \det(A) \det(P) = \det(A)$$

et donc  $\det(\varphi)$  ne dépend pas du choix de la base.

On montre les équivalences. On sait déjà que 2  $\iff$  5 et 3  $\iff$  6. On a aussi directement 6  $\iff$  7 par la définition du rang. Par le théorème du rang, on a  $\text{rang}(\varphi) = \dim(E)$  si et seulement si  $\dim \text{Ker}(\varphi) = 0$  et donc 7  $\iff$  5. On a donc 2  $\iff$  3  $\iff$  4  $\iff$  5  $\iff$  6  $\iff$  7. Il reste donc juste à relier 1 avec les 6 autres assertions. Mais, on sait que  $\varphi$  est bijective si et seulement si la matrice de  $\varphi$  dans toute base de  $E$  est inversible et donc si et seulement si  $\det(\varphi) \neq 0$ .  $\square$

## 1.4 Valeurs propres et vecteurs propres

### 1.4.1 Premières définitions

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Un vecteur *non nul*  $v \in \mathbb{K}^n$  est un **vecteur propre** de  $A$  si il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $Av = \lambda v$ . Dans ce cas, on dit que  $\lambda$  est la **valeur propre** associée à  $v$ . Un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $A$  si et seulement si il existe un vecteur  $v \in \mathbb{K}^n$  (non nul) dont c'est la valeur propre associée. L'ensemble des valeurs propres de  $A$  est appelé le **spectre** de  $A$ .

**Proposition 1.27.** *Un vecteur  $v \in \mathbb{K}^n$ ,  $v \neq 0$ , est un vecteur propre de  $A$  de valeur propre 0 si et seulement si  $v \in \text{Ker}(A)$ . En particulier, 0 est valeur propre de  $A$  si et seulement si  $\det(A) = 0$ .*

*Démonstration.* On a :  $v$  vecteur propre de valeur propre 0 ssi  $Av = 0 \cdot v = 0$  ssi  $v \in \text{Ker}(A)$  ce qui démontre le premier point. Maintenant, 0 est valeur propre ssi il existe  $v \neq 0$  dans  $\text{Ker}(A)$  donc ssi  $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$  ssi  $\det(A) = 0$ .  $\square$

**Exemple.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On a alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc le vecteur  ${}^t(1, 1)$  est vecteur propre de  $A$  associée à la valeur propre 1. Par ailleurs, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc le vecteur  ${}^t(1, -1)$  est vecteur propre de  $A$  associée à la valeur propre  $-1$ .

Le résultat suivant est une généralisation directe du résultat précédent.

**Proposition 1.28.** *Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ ,
2.  $\text{Ker}(A - \lambda \mathbf{I}_n) \neq \{0\}$ ,
3.  $\det(A - \lambda \mathbf{I}_n) = 0$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . On appelle sous-espace propre associée à  $\lambda$ , dénoté  $E_\lambda$ , l'ensemble formé des vecteurs propres associés à  $\lambda$  et du vecteur nul. On a donc  $E = \text{Ker}(A - \lambda \mathbf{I}_n)$  et ainsi  $E_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .

**Proposition 1.29.** *Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Alors  $E_\lambda$  est stable par multiplication par  $A$ . De plus, si  $\mu$  est une autre valeur propre de  $A$  alors  $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $v \in E_\lambda$ . On a  $Av = \lambda v \in E_\lambda$  puisque  $E_\lambda$  est un espace vectoriel. Maintenant, supposons que  $v \in E_\lambda \cap E_\mu$ . Alors, on a  $Av = \lambda v = \mu v$  d'où  $(\lambda - \mu)v = 0$  et donc  $v = 0$  puisque  $\lambda \neq \mu$ .  $\square$

Ce résultat se généralise à plusieurs valeurs propres. Une conséquence est que la matrice  $A$  a au plus  $n$  valeurs propres.

**Proposition 1.30.** *Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  des valeurs propres distinctes de  $A$ . Alors, les sous-espaces propres  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_s}$  sont en somme directe.*  $\square$

## 1.4.2 Rappels sur les polynômes

On rappelle que  $\mathbb{K}[T]$  dénote l'ensemble des polynômes en coefficient dans  $\mathbb{K}$  en la variable  $T$ . Soit  $f(T) \in \mathbb{K}$  avec  $f \neq 0$ , on a

$$f(T) = a_d T^d + a_{d-1} T^{d-1} + \dots + a_0$$

avec  $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$  et  $a_d \neq 0$ . L'entier  $d \geq 0$  est le degré de  $f$ . Le scalaire  $a_d$  est le coefficient dominant de  $f$ . On dit que  $f$  est **unitaire** si son coefficient dominant est égal à 1.

**Proposition 1.31** (Division euclidienne). *Soient  $f(T) \in \mathbb{K}[T]$  avec  $f(T) \neq 0$ . Alors, pour tout polynôme  $g(T) \in \mathbb{K}[T]$ , il existe deux polynômes  $q(T), r(T) \in \mathbb{K}[T]$  tels que  $g(T) = f(T)q(T) + r(T)$  et  $r(T) = 0$  ou  $\deg(r) < \deg(f)$ . De plus, les polynômes  $q$  et  $r$  sont uniques. On les appelle le **quotient** et le **reste** de la division (euclidienne) de  $g$  par  $f$ .*

Si le reste de la division de  $f$  par  $g$  est 0, on dit que  $f$  **divise**  $g$ . Supposons que  $\deg(f) \geq 1$ . On dit que  $f$  est **irréductible** si, pour factorisation  $f = gh$  avec  $g, h \in \mathbb{K}[T]$ , on a  $\deg(g) = 0$  ou  $\deg(h) = 0$ . Sinon,  $f$  est dit **réductible**.

**Théorème 1.32** (PGCD). *Soient  $f$  et  $g$  deux polynômes dans  $\mathbb{K}[T]$  tels que l'un des deux au moins est non nul. Alors, il existe un unique polynôme unitaire  $d(T) \in \mathbb{K}[T]$  tel que  $d$  divise  $f$  et  $d$  divise  $g$ , et si  $h(T) \in \mathbb{K}[T]$  est un polynôme tel que  $h$  divise  $f$  et  $g$ , alors  $h$  divise  $d$ . On appelle  $d$  le **plus grand commun diviseur (PGCD)** de  $f$  et  $g$ .*

Soient  $f$  et  $g$  deux polynômes dans  $\mathbb{K}[T]$  tels que l'un des deux au moins est non nul. On dit que  $f$  et  $g$  sont **premiers entre eux** si leur PGCD est 1.

**Théorème 1.33** (Relation de Bezout). *Soient  $f$  et  $g$  deux polynômes dans  $\mathbb{K}[T]$  tels que l'un des deux au moins est non nul. Alors,  $f$  et  $g$  sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux polynômes  $u, v \in \mathbb{K}[T]$  tels que*

$$f(T)u(T) + g(T)v(T) = 1.$$

Soit  $f \in \mathbb{K}[T]$  avec  $f \neq 0$ . On dit que  $\alpha \in \mathbb{K}$  est **racine** ou **zéro** de  $f$  si on a  $f(\alpha) = 0$ .

**Proposition 1.34.** *Soit  $f \in \mathbb{K}[T]$  avec  $f \neq 0$  et soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Alors,  $\alpha$  est racine de  $f$  si et seulement si  $(T - \alpha)$  divise  $f$ .*

*Démonstration.* On fait la division de  $f(T)$  par  $T - \alpha$

$$f(T) = (T - \alpha)q(T) + r$$

avec  $r \in \mathbb{K}$  puisque  $\deg(T - \alpha) = 1$ . Puisque  $\alpha$  est racine de  $T - \alpha$ , on trouve que  $\alpha$  est racine de  $f$  si et seulement si  $r = 0$  si et seulement si  $T - \alpha$  divise  $f(T)$ .  $\square$

Soit  $\alpha$  une racine du polynôme  $f(T) \in \mathbb{K}[T]$ . On peut écrire de manière unique

$$f(T) = (T - \alpha)^m g(T)$$

avec  $m \geq 1$ , un entier, et  $g$  un polynôme tel que  $g(\alpha) \neq 0$ . On appelle l'entier  $m$  la **multiplicité** de la racine  $\alpha$ .

Un polynôme  $f(T) \in \mathbb{K}[T]$ , non nul et de degré  $\geq 1$ , est dit **scindé** sur  $\mathbb{K}$  si  $f$  possède toutes ses racines dans  $\mathbb{K}$ ; en d'autres termes, il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  dans  $\mathbb{K}$  et des entiers  $m_1, \dots, m_t \geq 1$  tels que

$$f(T) = (T - \alpha_1)^{m_1} \dots (T - \alpha_t)^{m_t}. \quad (1.1)$$

**Théorème 1.35.** *Tout polynôme est scindé sur  $\mathbb{C}$ .*

### 1.4.3 Polynôme caractéristique

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , le **polynôme caractéristique** de  $A$  est défini par

$$C_A(T) = \det(A - T \mathbf{I}_n).$$

C'est un polynôme de degré  $n$  dont le terme dominant est  $(-1)^n$ .

**Proposition 1.36.** *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. De plus, on a  $\det(A) = C_A(0) = a_0$  et  $\text{Tr}(A) = -a_{n-1}$  où  $C_A(T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_{n-1} T^{n-1} + (-1)^n T^n$ .*

*Démonstration.* On montre juste la première affirmation; l'affirmation concernant le déterminant est directe à montrer. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices semblables. Par hypothèse, il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $B = P^{-1}AP$ . On calcule

$$\begin{aligned} C_B(T) &= \det(P^{-1}AP - T \mathbf{I}_n) \\ &= \det(P^{-1}(A - T \mathbf{I}_n)P) \\ &= \det(P)^{-1} \det(A - T \mathbf{I}_n) \det(P) = C_A(T). \quad \square \end{aligned}$$

**Théorème 1.37.** *Un nombre  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si  $\lambda$  est une racine de  $C_A(T)$ .*

**Exemple.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On calcule

$$C_A(T) = \det \begin{pmatrix} -T & 2 \\ 1 & -T \end{pmatrix} = T^2 - 2.$$

Les deux racines sont  $-\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$ , ce sont donc les deux valeurs propres de  $A$ . On vérifie que  $\sqrt{2}$  est bien une valeur propre en cherchant un vecteur propre correspondant. On cherche donc  $v = {}^t(x, y)$  tel que

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2y = \sqrt{2}x \\ x = \sqrt{2}y \end{cases}$$

Une solution est  ${}^t(\sqrt{2}, 1)$ , c'est bien un vecteur propre de valeur propre  $\sqrt{2}$ .

#### 1.4.4 Polynôme minimal et théorème de Cayley-Hamilton

Soit  $f(T) = \lambda_m T^m + \dots + \lambda_1 T + \lambda_0 \in \mathbb{K}[T]$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée. On définit

$$f(A) = \lambda_m A^m + \dots + \lambda_1 A + \lambda_0 \mathbf{I}_n \in M_n(\mathbb{K}).$$

**Proposition 1.38.** Soient  $f$  et  $g$  deux polynômes dans  $\mathbb{K}[T]$  et soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on a

1.  $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$ ,
2.  $(fg)(A) = f(A)g(A) = g(A)f(A)$ .

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On appelle **polynôme annulateur** de  $A$  tout polynôme *non nul*  $f \in \mathbb{K}[T]$  vérifiant  $f(A) = 0$  (matrice nulle).

**Exemple.** Soit  $A \in M_2(\mathbb{K})$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$C_A(T) = T^2 - \text{Tr}(A)T + \det(A).$$

On montre que  $C_A(T)$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

**Proposition 1.39.** Toute matrice carrée possède un polynôme annulateur.

*Démonstration.* Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Posons  $m = \dim(M_n(\mathbb{K})) = n^2$ . On considère la famille de matrices  $(\mathbf{I}_n, A, A^2, \dots, A^m)$ . Cette famille possède  $m + 1$  et donc elle est liée. Ainsi, il existe  $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ , non tous nuls, tels que

$$\lambda_0 \mathbf{I}_n + \dots + \lambda_m A^m = 0.$$

Il suit que le polynôme  $\lambda_m T^m + \dots + \lambda_0$  est un polynôme annulateur de  $A$ . □

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On appelle **polynôme minimal** de  $A$ , le polynôme unitaire  $m_A(T)$  annulateur de  $A$  et de plus petit degré.

**Proposition 1.40.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Le polynôme minimal  $m_A(T)$  de  $A$  est unique et divise tout polynôme annulateur de  $A$ .

*Démonstration.* On montre pour commencer la deuxième assertion. Soit  $f(T)$  un polynôme annulateur de  $A$ . Par division euclidienne, on peut écrire

$$f(T) = m_A(T)q(T) + r(T)$$

avec  $r(T) = 0$  ou  $\deg(r) < \deg(m_A)$ . Supposons que  $r \neq 0$ . Puisque  $f(A) = m_A(A) = 0$ , on en déduit que  $r(A) = 0$  et donc  $r$  est un polynôme annulateur de  $A$  avec  $\deg(r) < \deg(m_A)$ . Ceci est une contradiction car le degré de  $m_A$  est minimal. Ainsi, on a  $r = 0$  et  $m_A(T)$  divise  $f(T)$ .

Maintenant, supposons que  $m_0(T) \in \mathbb{K}[T]$  est un autre polynôme unitaire annulateur de  $A$  avec  $\deg(m_A) = \deg(m_0)$ . Alors, on a que  $m_A(T)$  divise  $m_0(T)$ . Comme ils sont de même degré, il suit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $m_0(T) = \lambda m_A(T)$ . Mais, comme les polynômes  $m_0(T)$  et  $m_A(T)$  sont unitaires, on trouve que  $\lambda = 1$  et donc  $m_0(T) = m_A(T)$ . Donc le polynôme minimal est bien unique. □

Le résultat fondamental sur les polynômes annulateurs est le suivant.

**Théorème 1.41** (Cayley-Hamilton). *Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée est un polynôme annulateur de cette matrice. En d'autres termes, pour  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on a  $C_A(A) = 0$ .*  $\square$

**Corollaire 1.42.** *Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Soit  $f(T)$  est un polynôme annulateur de  $A$ , alors les valeurs propres de  $A$  sont parmi les racines de  $f$ . En particulier, un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $A$  si et seulement si  $\lambda$  est une racine de  $m_A(T)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $A$ . Alors, il existe un vecteur non nul  $x$  tel que  $Ax = \lambda x$ . On pose  $f(T) = a_n T^n + \dots + a_0$  et on calcule

$$f(A)x = a_n A^n x + \dots + a_1 Ax + a_0 x = a_n \lambda^n x + \dots + a_1 \lambda x + a_0 x = f(\lambda)x.$$

D'un autre côté, on a  $f(A) = 0$  puisque  $f$  est un polynôme annulateur de  $A$  et donc on a  $f(\lambda) = 0$  puisque  $x \neq 0$ . On a bien montré que  $\lambda$  est une racine de  $f$ .

Maintenant, le polynôme minimal  $m_A$  divise le polynôme caractéristique puisque le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur par le théorème de Cayley-Hamilton. Donc les racines de  $m_A$  sont parmi les valeurs propres de  $A$ . En combinant avec le premier point, on en déduit que les racines de  $m_A$  sont exactement les valeurs propres de  $A$ .  $\square$

### 1.4.5 Valeurs propres d'un endomorphisme

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ . Un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est un **valeur propre** de  $\lambda$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Il existe un vecteur  $v \in E$ ,  $v \neq 0$ , tel que  $\varphi(v) = \lambda v$ ,
2.  $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$ ,
3.  $\det(u - \lambda \text{id}) = 0$ ,
4. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et soit  $A$  la matrice de  $\varphi$  sur cette base, alors  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ .

Comme précédemment, dans ce cas, on appelle **vecteur propre** associé à  $\lambda$ , tout vecteur  $v$  non nul tel que  $\varphi(v) = \lambda v$ .

Le **polynôme caractéristique** de  $\varphi$  est le polynôme caractéristique de la matrice de  $A$  dans une base de  $E$ . Comme vu précédemment, ce polynôme ne dépend pas du choix de la base et on le note  $C_\varphi(T)$ .

**Proposition 1.43.** *L'ensemble des valeurs propres de  $\varphi$ , appelé le **spectre** de  $\varphi$ , est égal à l'ensemble des racines dans  $\mathbb{K}$  du polynôme caractéristique  $C_\varphi(T)$ .*

## 1.5 Diagonalisation

### 1.5.1 Problème de la diagonalisation

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est **diagonalisable** si  $A$  est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et une matrice diagonale  $D$

de type  $n$  telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Supposons  $A$  diagonalisable, **diagonaliser**  $A$  consiste à calculer des matrices  $P$  et  $D$  vérifiant cette relation. (En général, les matrices  $P$  et  $D$  ne sont pas uniques.)

**Théorème 1.44.** *Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Alors, la matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si il existe une base de  $\mathbb{K}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ .*

*Démonstration.* Supposons que la base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $E$  est formée de vecteurs propres associées respectivement aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . On pose  $P = (v_1 | \dots | v_n)$ . On calcule

$$AP = (Av_1 | \dots | Av_n) = (\lambda_1 v_1 | \dots | \lambda_n v_n) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

et donc  $A$  est diagonalisable.

Réciproquement, supposons  $A$  diagonalisable. Soient  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ . Alors, on vérifie comme ci-dessus que les colonnes de  $P$  forment une base de  $\mathbb{K}^n$  composée de vecteurs propres de  $A$ .  $\square$

**Corollaire 1.45.** *Supposons  $A$  est diagonalisable. Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une base de  $\mathbb{K}^n$  telle que, pour  $i = 1, \dots, n$ , le vecteur  $v_i$  est vecteur propre de  $A$  associée à la valeur propre  $\lambda_i$ . On pose*

$$P = (v_1 | \dots | v_n) \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors, on a  $A = PDP^{-1}$ .

**Corollaire 1.46.** *Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Supposons que  $A$  possède  $n$  valeurs propres distinctes. Alors,  $A$  est diagonalisable.*

*Démonstration.* Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  et soit  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs propres associés. Alors, on a les sous-espaces vectoriels  $\mathbb{K}v_1, \dots, \mathbb{K}v_n$  sont en somme directe et donc  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  formée de vecteurs propres.  $\square$

Attention : il peut exister des matrices dans  $M_n(\mathbb{K})$  avec strictement moins de valeurs propres que  $n$  qui sont pourtant diagonalisables.

## 1.5.2 Caractérisation des matrices diagonalisables

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On rappelle que, pour  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ , on dénote par  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé à  $\lambda$ , c'est-à-dire

$$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \mathbf{I}_n).$$



**Proposition 1.47.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et soit  $m$  la multiplicité de  $\lambda$  comme racine du polynôme caractéristique  $C_A(T)$  de  $A$ . Alors, on a

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m.$$

On en déduit la caractérisation des matrices diagonalisables.

**Théorème 1.48.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres de  $A$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est diagonalisable,
2. On a  $\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s}$ ,
3. Pour  $i = 1, \dots, s$ , on a  $\dim E_{\lambda_i} = m_i$  où  $m_i$  est la multiplicité de  $\lambda_i$  comme racine de  $C_A(T)$  et

$$m_1 + \dots + m_s = n.$$

**Corollaire 1.49.** Supposons que le polynôme caractéristique  $C_A(T)$  de  $A$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{K}$ . Alors,  $A$  n'est pas diagonalisable.

Ce corollaire ne s'applique que quand  $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$  car tout les polynôme sont scindés sur  $\mathbb{C}$ . De fait, il existe des exemples de matrices carrées réelles qui ne sont pas diagonalisables sur  $\mathbb{R}$ , mais sont diagonalisables sur  $\mathbb{C}$ .

### 1.5.3 Méthode de diagonalisation

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . La méthode pour déterminer si la matrice  $A$  est diagonalisable et la diagonaliser si c'est possible est la suivante :

1. Calculer le polynôme caractéristique  $C_A(T)$  de  $A$ .
2. Calculer les racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  de  $C_A(T)$  dans  $\mathbb{K}$  et leur multiplicité  $m_1, \dots, m_s$ .
3. Si  $m_1 + \dots + m_s < n$  alors  $C_A(T)$  n'est pas scindé et  $A$  n'est pas diagonalisable et le processus s'arrête.
4. Pour  $i = 1, \dots, s$ , faire
  - (a) Calculer la dimension  $d$  de  $E_{\lambda_i}$ .
  - (b) Si  $d < m_i$ , alors  $A$  n'est pas diagonalisable et le processus s'arrête.
  - (c) Calculer une base  $(v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i})$  de  $E_{\lambda_i}$ .
5. La matrice  $A$  est diagonalisable. On pose

$$P = (v_{1,1} | \dots | v_{1,m_1} | \dots | v_{s,1} | \dots | v_{s,m_s}) \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix}$$

la matrice  $P$  est obtenue en réunissant les bases calculées en 4.(c) et la matrice  $D$  est la matrice diagonale avec sur la diagonale les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  répétées avec leur multiplicité. Alors, on a

$$A = PDP^{-1}.$$

**Exemple.** On cherche à diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On calcule  $C_A(T) = T^3 - 5T^2 + 8T - 4$ .
2. La racine  $\lambda_1 = 1$  est évidente. On divise  $C_A(T)/(T-1) = T^2 - 4T + 4 = (T-2)^2$ .  
Donc on a  $m_1 = 1$  et l'autre racine est  $\lambda_2 = 2$  de multiplicité  $m_2 = 2$ .
3. Puisque  $m_1 + m_2 = 3$ , il n'y a pas d'obstacle (pour l'instant) à diagonaliser  $A$ .
4.  $i = 1 : \lambda = 1$  et  $m = 1$ .

(a) Le vecteur  $v = {}^t(x, y, z) \in E_1$  ssi  $Av = v$  ssi

$$\begin{cases} 2x - y + z = x \\ y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

(b-c) Donc  $E_1$  est de dimension  $3 - 2 = 1$  avec pour base  $({}^t(1, 1, 0))$ .

4.  $i = 2 : \lambda = 2$  et  $m = 2$ .

(a) Le vecteur  $v = {}^t(x, y, z) \in E_2$  ssi  $Av = 2v$  ssi

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2x \\ y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} -y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ ssi } -y + z = 0$$

(b-c) Donc  $E_2$  est de dimension  $3 - 1 = 2$  avec pour base  $({}^t(0, 1, 1), {}^t(1, 0, 0))$ .

5. La matrice  $A$  est diagonalisable. On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on a  $A = PDP^{-1}$ .

### 1.5.4 Applications de la diagonalisation des matrices

**Proposition 1.50.** *Supposons que  $A$  est diagonalisable et que les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  de multiplicité  $m_1, \dots, m_s$ . Alors, on a*

$$\text{Tr } A = m_1\lambda_1 + \dots + m_s\lambda_s \quad \text{et} \quad \det A = \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_s^{m_s}.$$

*Démonstration.* Soient  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $D$  la matrice diagonale dont la diagonale est

$$\underbrace{(\lambda_1, \dots, \lambda_1)}_{m_1}, \dots, \underbrace{(\lambda_s, \dots, \lambda_s)}_{m_s}$$

de telle sorte que  $A = PDP^{-1}$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &= \text{Tr}(PDP^{-1}) = \text{Tr}(D) = m_1\lambda_1 + \dots + m_s\lambda_s, \\ \det(A) &= \det(P) \det(D) \det(P^{-1}) = \det(D) = \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_s^{m_s}. \end{aligned} \quad \square$$

**Remarque.** Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , le résultat est aussi vrai si la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

Notons que diagonaliser une matrice n'est pas une méthode efficace pour calculer le déterminant d'une matrice en général. De fait, pour cela, il est déjà nécessaire de calculer le polynôme caractéristique  $C_A(T)$  de  $A$  est

$$C_A(0) = \det(A).$$

**Proposition 1.51.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Soient  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in M_n(K)$  telles que

$$A = PBP^{-1}.$$

Alors, pour tout  $k \geq 1$ , on a

$$A^k = PB^kP^{-1}.$$

Si, de plus,  $B$  est inversible alors  $A$  est inversible et, pour tout  $k \geq 1$ , on a

$$A^{-k} = PB^{-k}P^{-1}.$$

*Démonstration.* Soit  $k \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1}) \cdots (PBP^{-1})}_{k \text{ fois}} \\ &= PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P) \cdots (P^{-1}P)BP^{-1} \\ &= P \underbrace{B \cdots B}_{k \text{ fois}} P^{-1} = PB^kP^{-1}. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $B$  est inversible, on a

$$A(PB^{-1}P^{-1}) = PBP^{-1}PB^{-1}P^{-1} = PBB^{-1}P^{-1} = PP^{-1} = \mathbf{I}_n$$

et donc  $A^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$ . Le reste de la démonstration se fait de manière similaire au cas précédent.  $\square$

Soit  $D$  la matrice diagonale dont la diagonale est

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ . Alors, pour tout  $k \geq 1$ , la matrice  $D^k$  est diagonale et sa diagonale est

$$(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k).$$

Si, de plus,  $\lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$ , alors  $D$  est inversible et, pour tout  $k \geq 1$ , la matrice  $D^{-k}$  est diagonale et sa diagonale est

$$(\lambda_1^{-k}, \dots, \lambda_n^{-k}).$$

En combinant la proposition et cette remarque, on peut en déduire des formules pour les puissances de matrices diagonalisables.

**Exemple.** Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont 1 et 3 et on trouve la diagonalisation

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Notons que

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^k + 1 & 3^k - 1 \\ 3^k - 1 & 3^k + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Une autre application de la diagonalisation est pour le calcul de l'**exponentielle de matrice**. Pour  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on pose

$$e^A = \exp(A) = \mathbf{I}_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}A^k.$$

L'exponentielle de matrices joue un rôle important notamment dans la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires.

**Remarque.** La fonction classique exponentielle est donnée, pour  $z \in \mathbb{C}$ , par

$$e^z = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}.$$

**Théorème 1.52.** Pour tout  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , la matrice  $e^A$  existe et vérifie les propriétés suivantes :

1. La matrice  $e^A$  est inversible et son inverse est  $e^{-A}$ ,
2. Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  deux matrices qui commutent, c'est-à-dire  $AB = BA$ , alors

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

3. Soit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , une matrice inversible, on a

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}.$$

*Démonstration.* La preuve de 2. est similaire à la preuve de la formule classique  $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$  pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Maintenant, on a

$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = \mathbf{I}_n$$

donc  $e^A$  est inversible et son inverse est  $e^{-A}$  ce qui prouve 1. Finalement, pour la preuve de 3, on a

$$e^{PAP^{-1}} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (PAP^{-1})^k = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} P A^k P^{-1} = P \left( \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k \right) P^{-1} = P e^A P^{-1}. \quad \square$$

Comme dans le cas des puissances de matrices, le fait essentiel est que l'exponentielle d'une matrice diagonale est facile à calculer. Plus précisément, soit la matrice diagonale  $D$  dont la diagonale est  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , alors la matrice  $e^D$  est diagonale avec pour diagonale

$$(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

**Exemple.** Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont 1 et 3 et on trouve la diagonalisation

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Notons que

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} e^A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e + e^3 & -e + e^3 \\ -e + e^3 & e + e^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

# Chapitre 2

## Algèbre bilinéaire

### 2.1 Formes bilinéaires

#### 2.1.1 Définitions

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une **forme bilinéaire** est une application  $\Phi$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{K}$  linéaire par rapport à chaque argument. C'est-à-dire, pour  $x, x', y, y' \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a :

$$\begin{aligned}\Phi(x + x', y) &= \Phi(x, y) + \Phi(x', y), \\ \Phi(x, y + y') &= \Phi(x, y) + \Phi(x, y'), \\ \Phi(\lambda x, y) &= \Phi(x, \lambda y) = \lambda \Phi(x, y).\end{aligned}$$

Les formes bilinéaires constituent un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, noté  $L_2(E)$ . Nous déterminerons la structure de cet espace dans la prochaine section.

#### Exemples.

1.  $E = \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = xy$ .
2.  $E = C([0, 1])$ ,  $\Phi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(1-t) dt$ .

Dorénavant, on suppose  $E$  de dimension finie  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , on écrit les décompositions :

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \\ y &= \sum_{i=1}^n \mu_i e_i.\end{aligned}$$

Par la linéarité de  $\Phi$ , on trouve alors que :

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \Phi(e_i, e_j).$$

On pose  $a_{i,j} = \Phi(e_i, e_j)$  et on introduit la matrice  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ . On appelle  $A$  la **matrice représentant  $\Phi$  sur la base  $\mathcal{B}$** . On note  $X$  (resp.  $Y$ ) le vecteur représentant  $x$  (resp.  $y$ ) sur la base  $\mathcal{B}$ . L'expression matricielle de  $\Phi$  est donnée par :

$$\Phi(x, y) = {}^t X A Y.$$

**Remarque.** La réciproque est aussi vraie, toute application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{K}$  qui peut s'écrire sous cette forme est une forme bilinéaire.

**Théorème 2.1.** *L'application de  $L_2(\mathbb{K})$  dans  $M_n(\mathbb{K})$  définie par  $\Phi \mapsto A$  où  $A$  est la matrice de  $\Phi$  relativement à une base fixée de  $\mathbb{K}$ , est un isomorphisme. En particulier,  $L_2(\mathbb{K})$  est de dimension  $n^2$ .  $\square$*

Pour conclure cette section, on étudie la transformation de la matrice  $A$  quand on change la base  $\mathcal{B}$ . Ainsi, soit  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  une autre base de  $E$ . Posons  $X'$  (resp.  $Y'$ ) le vecteur exprimant  $x$  (resp.  $y$ ) sur  $\mathcal{B}'$ . On note  $P$  la matrice de changement de base de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ . (Rappel : c'est la matrice dont les colonnes sont les expressions des vecteurs  $e'_i$  sur la base  $\mathcal{B}$ .) On a ainsi :

$$X = P X' \quad \text{et} \quad Y = P Y',$$

d'où :

$$\Phi(x, y) = {}^t X A Y = {}^t X' {}^t P A P Y'$$

et la matrice  $A'$  représentant  $\Phi$  sur la base  $\mathcal{B}'$  est :

$$A' = {}^t P A P.$$

### 2.1.2 Formes bilinéaires symétriques ou alternées

Soit  $\Phi$  une forme bilinéaire de  $E$ . On dit que  $\Phi$  est **symétrique** si, pour tout  $x, y \in E$ , on a

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x).$$

On dit que  $\Phi$  est **anti-symétrique** si, pour tout  $x, y \in E$ , on a

$$\Phi(x, y) = -\Phi(y, x).$$

Finalement, on dit que  $\Phi$  est **alternée** si, pour tout  $x \in E$ , on a

$$\Phi(x, x) = 0.$$

**Exemple.** Soit  $E = M_n(\mathbb{K})$ . On considère l'application  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  définie par  $\Phi(A, B) = \text{Tr}(AB)$ . L'application  $\Phi$  est une forme bilinéaire. Elle est symétrique car on a la relation  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  pour toutes matrices  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ .

**Proposition 2.2.** *Toute forme bilinéaire est alternée si et seulement si elle est anti-symétrique.*

*Démonstration.* Soit  $\Phi$  une forme bilinéaire alternée. Pour  $x, y \in E$ , on a  $\Phi(x + y, x + y) = 0 = \Phi(x, x) + \Phi(y, y) + \Phi(x, y) + \Phi(y, x) = \Phi(x, y) + \Phi(y, x)$ . On en déduit que  $\Phi(x, y) = -\Phi(y, x)$  et  $\Phi$  est anti-symétrique.

Soit  $\Phi$  une forme bilinéaire anti-symétrique. Soit  $x \in E$ . On a  $\Phi(x, x) = -\Phi(x, x)$  d'où  $2\Phi(x, x) = 0$  et  $\Phi(x, x) = 0$ .  $\square$

On fixe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Soit  $\Phi \in L_2(E)$  et soit  $A$  la matrice de  $\Phi$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . La forme  $\Phi$  est symétrique si et seulement si  $A$  est symétrique, c'est-à-dire  ${}^tA = A$ . La forme  $\Phi$  est alternée si et seulement si  ${}^tA = -A$ , on dit que  $A$  est anti-symétrique ou alternée.

On note  $\text{Sym}_2(E)$  l'ensemble des formes bilinéaires symétriques et  $\text{Alt}_2(E)$  l'ensemble des formes bilinéaires alternées. On vérifie facilement que ce sont des sous-espaces vectoriels de  $L_2(E)$ .

**Théorème 2.3.** *On a*

$$L_2(E) = \text{Sym}_2(E) \oplus \text{Alt}_2(E).$$

*Démonstration.* Le seul point qui n'est pas direct est le fait que  $L_2(E) = \text{Sym}_2(E) + \text{Alt}_2(E)$ . Soit  $\Phi \in L_2(\mathbb{K})$ . On pose

$$\Phi_0(x, y) = \frac{\Phi(x, y) + \Phi(y, x)}{2} \quad \text{et} \quad \Phi_1(x, y) = \frac{\Phi(x, y) - \Phi(y, x)}{2}.$$

On vérifie facilement que  $\Phi_0$  est symétrique et  $\Phi_1$  est anti-symétrique. De plus, on a directement  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$ .  $\square$

### 2.1.3 Noyau et rang des formes bilinéaires symétriques ou alternées

Soit  $\Phi$  une forme bilinéaire. On peut définir deux notions de noyau à gauche et à droite de la manière suivante

$$\begin{aligned} \text{Ker } \Phi_g &= \{x \in E \text{ tel que } \Phi(x, y) = 0, \forall y \in E\} \\ \text{Ker } \Phi_d &= \{y \in E \text{ tel que } \Phi(x, y) = 0, \forall x \in E\}. \end{aligned}$$

En termes de matrice, étant donné une matrice  $A$  de type  $n$ , cela revient à considérer d'une part l'ensemble des vecteurs  $X$  tels que  ${}^tXA = 0$  et d'un autre côté l'ensemble des vecteurs  $Y$  tels que  $AY = 0$ . Si la matrice  $A$  est symétrique ou anti-symétrique, on a

$${}^tXA = 0 \iff {}^t({}^tXA) = 0 \iff {}^tAX = 0 \iff AX = 0.$$

On en déduit résultat suivant.

**Lemme 2.4.** *Soit  $\Phi$  une forme bilinéaire symétrique ou alternée. On a  $\text{Ker } \Phi_g = \text{Ker } \Phi_d$ .*

On peut donc définir, pour  $\Phi$  symétrique ou alternée, le **noyau** de  $\Phi$  comme

$$\text{Ker } \Phi = \{x \in E \text{ tel que } \Phi(x, y) = 0, \forall y \in E\} = \{y \in E \text{ tel que } \Phi(x, y) = 0, \forall x \in E\}.$$



Soit  $\Phi$  une forme bilinéaire symétrique ou alternée. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . On note  $A$  la matrice de  $\Phi$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . On montre que la dimension du noyau de  $\Phi$  est égale à la dimension du noyau de  $A$ . On a donc par la formule du rang

$$\dim \text{Ker } \Phi = n - \text{rang } A.$$

Le **rang** d'une forme bilinéaire symétrique ou alternée  $\Phi$  est défini comme le rang d'une matrice  $A$  représentant  $\Phi$  relativement à une base arbitraire de  $E$ . On note  $\text{rang } \Phi$ . La formule ci-dessus donne le résultat suivant.

**Proposition 2.5.** *Soit  $\Phi$  une forme bilinéaire symétrique ou alternée de  $E$ , on a*

$$\dim E = \text{rang } \Phi + \dim \text{Ker } \Phi. \quad \square$$

Une forme bilinéaire symétrique ou alternée  $\Phi$  est **non dégénérée** si son noyau est l'espace nul, ce qui revient à dire que son rang est maximal. Dans le cas contraire, on dit que  $\Phi$  est **dégénérée**.

**Proposition 2.6.** *Soit  $\Phi$  une forme bilinéaire symétrique ou alternée. Soit  $A$  la matrice représentant  $\Phi$  dans une base arbitraire de  $E$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\Phi$  est non dégénérée,
2.  $\det(A) \neq 0$ . □

**Exemples.** Soit  $\Psi$  la forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$\begin{aligned} \Psi({}^t(x_1, x_2), {}^t(y_1, y_2)) &= x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2, \\ &= x_1(y_1 + y_2) + x_2(y_1 + y_2) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

La matrice de  $\Psi$  sur la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est nul. Donc  $\Psi$  est dégénérée. Le noyau de  $\Psi$  est la droite d'équation  $x_1 + x_2 = 0$ .

Soit  $\Phi$  la forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^3$  définie par :

$$\begin{aligned} \Phi({}^t(x_1, x_2, x_3), {}^t(y_1, y_2, y_3)) &= -2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 \\ &= x_1(-2y_2 + y_3) + x_2(2y_1 - y_3) + x_3(-y_1 + y_2). \end{aligned}$$

Ainsi, sous forme matricielle :

$$\Phi({}^t(x_1, x_2, x_3), {}^t(y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -2y_2 + y_3 \\ 2y_1 - y_3 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

D'où l'expression matricielle de  $\Phi$  sur la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme  $\Phi$  est alternée. Le déterminant de  $A$  est 0, donc  $\Phi$  est dégénérée. Pour trouver le noyau, on résout le système

$$\begin{cases} -2y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_1 - y_3 = 0 \\ -y_1 + y_2 = 0. \end{cases}$$

Donc  $\text{Ker } \Phi = \text{Vec}({}^t(1, 1, 2))$ .

## 2.2 Orthogonalité

Soit  $\Phi$  une forme bilinéaire de  $E$ . Soient  $x, y \in E$ . On dit que  $y$  est **orthogonal** à  $x$  (relativement à  $\Phi$ ) si on a  $\Phi(x, y) = 0$ . On note  $x \perp_{\Phi} y$  ou  $x \perp y$  plus simplement quand il n'y a pas de risque de confusion. Si  $\Phi$  est symétrique ou alternée, la relation d'orthogonalité est symétrique :  $x \perp y$  si et seulement si  $y \perp x$ . Dans le cas où  $\Phi$  est symétrique ou alternée, tout élément de  $\text{Ker } \Phi$  est orthogonal à tous les éléments de  $E$ .

**On suppose pour la suite que  $\Phi$  est symétrique ou alternée.**

Pour tout  $x \in E$ , on pose :

$$x^{\perp} = \{y \in E \text{ tel que } x \perp y = 0\}.$$

Plus généralement, si  $\mathcal{X}$  est un sous-ensemble non vide de  $E$ , on pose :

$$\mathcal{X}^{\perp} = \{y \in E \text{ tel que } x \perp y \text{ pour tout } x \in \mathcal{X}\},$$

ainsi  $x^{\perp} = \{x\}^{\perp}$ . On appelle  $x^{\perp}$  (resp.  $\mathcal{X}^{\perp}$ ) l'**orthogonal** de  $x$  (resp. de  $\mathcal{X}$ ).

**Proposition 2.7.** *Soit  $\mathcal{X}$  un sous-ensemble non vide de  $E$ . Alors  $\mathcal{X}^{\perp}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $\text{Ker } \Phi$ .*

*Démonstration.* On montre facilement que  $x^{\perp}$  est un sous-espace vectoriel. Maintenant, on a

$$\mathcal{X}^{\perp} = \bigcap_{x \in \mathcal{X}} x^{\perp}.$$

C'est donc bien un sous-espace vectoriel puisque l'intersection d'un nombre quelconque (non nul) de sous-espaces vectoriels est toujours un sous-espace vectoriel. Le fait que  $\mathcal{X}^{\perp}$  contienne  $\text{Ker } \Phi$  vient du fait que les éléments de  $\text{Ker } \Phi$  sont orthogonaux à n'importe quel élément de  $E$  par définition.  $\square$

Les propriétés suivantes de l'orthogonal se montrent sans difficultés :

- Si  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ , alors  $\mathcal{Y}^{\perp} \subset \mathcal{X}^{\perp}$ ,
- $\mathcal{X} \subset (\mathcal{X}^{\perp})^{\perp}$ .

### 2.2.1 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . L'orthogonal  $F^\perp$  de  $F$  (toujours par rapport à la forme bilinéaire fixée  $\Phi$ ) est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Nous allons étudier les relations entre  $F$  et  $F^\perp$ . On a d'abord le premier résultat.

**Proposition 2.8.**

1. Soit  $\mathcal{X}$  une partie de  $E$ . On a  $\mathcal{X}^\perp = \text{Vec}(\mathcal{X})^\perp$ .
2. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On a  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .
3. Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et soit  $(h_1, \dots, h_s)$  une famille génératrice de  $H$ . Alors,  $x \in H^\perp$  si et seulement si  $x \perp h_i$  pour  $i = 1, \dots, s$ .

*Démonstration.* On prouve le point 1. On a  $\mathcal{X} \subset \text{Vec}(\mathcal{X})$ , d'où  $\text{Vec}(\mathcal{X})^\perp \subset \mathcal{X}^\perp$ . Pour l'autre inclusion, soit  $u \in \mathcal{X}^\perp$  et soit  $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s \in \text{Vec}(\mathcal{X})$  avec  $x_1, \dots, x_s \in \mathcal{X}$ . On a

$$\Phi(x, u) = \lambda_1 \Phi(x_1, u) + \dots + \lambda_s \Phi(x_s, u) = 0$$

et donc  $\mathcal{X}^\perp \subset \text{Vec}(\mathcal{X})^\perp$  ce qui achève la preuve de ce point.

Pour le point 2, on a  $F \subset F + G$  et donc  $(F + G)^\perp \subset F^\perp$ . De même, on a  $(F + G)^\perp \subset G^\perp$  et donc  $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$ . Pour l'inclusion inverse, on considère  $x \in F^\perp \cap G^\perp$ . Soit  $a + b \in F + G$  avec  $a \in F$  et  $b \in G$ . On calcule  $\Phi(x, a + b) = \Phi(x, a) + \Phi(x, b) = 0$ , donc  $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$  et l'égalité est démontrée.

Finalement, pour le point 3, on voit directement que si  $x \in H^\perp$  alors  $x \perp h_i$  pour  $i = 1, \dots, s$ . Réciproquement, supposons que  $x \perp h_i$  pour  $i = 1, \dots, s$ . Soit  $y \in H$ , alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}$  tels que  $y = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_s h_s$ . On a donc

$$\Phi(x, y) = \lambda_1 \Phi(x, h_1) + \dots + \lambda_s \Phi(x, h_s) = 0.$$

Il suit que  $x \in H^\perp$  et le résultat est démontré. □

**Exemple.** Soit  $E = M_n(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel des matrices carrées de type  $n$  et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . On considère la forme bilinéaire symétrique  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  définie par  $\Phi(A, B) = \text{Tr}(AB)$ . Soit  $M_n^s(\mathbb{K})$  le sous-espace vectoriel des matrices symétriques. On calcule  $M_n^s(\mathbb{K})^\perp$ . Soient  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $M_{i,j}$  la matrice élémentaire dont le coefficient de la ligne  $i$  et colonne  $j$  est égal à 1 et tous les autres sont égaux à 0. Les matrices  $M_{i,j}$ , pour  $1 \leq i, j \leq n$ , forment une base de  $E$  et les matrices  $M_{i,j} + M_{j,i}$  engendrent  $M_n^s(\mathbb{K})$ . Soit  $A = (a_{i,j}) \in E$ . On regarde à quelles conditions  $A \perp (M_{i,j} + M_{j,i})$ . On a

$$\text{Tr}(A(M_{i,j} + M_{j,i})) = \text{Tr}(AM_{i,j}) + \text{Tr}(AM_{j,i}) = a_{i,j} + a_{j,i}$$

et donc  $A \perp (M_{i,j} + M_{j,i})$  si et seulement si  $a_{i,j} = -a_{j,i}$ . Par la partie 2 de la proposition, il suit que  $A \in M_n^s(\mathbb{K})^\perp$  si et seulement si on a  $a_{i,j} = -a_{j,i}$  pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ . Donc l'orthogonal de  $M_n^s(\mathbb{K})$  pour  $\Phi$  est le sous-espace vectoriel des matrices alternées.

**Théorème 2.9.** On a

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F + \dim (F \cap \text{Ker } \Phi).$$

En particulier, on a

$$\dim F^\perp \geq \dim E - \dim F.$$

De plus, si  $\Phi$  est non dégénérée, on a  $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$  et  $(F^\perp)^\perp = F$ .

**Exemples.** Sur  $\mathbb{R}^2$ , on considère la forme bilinéaire :

$$\Phi({}^t(x_1, x_2), {}^t(y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2.$$

Soit  $D$  la droite d'équation  $v_1 = v_2$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ . Calculons son orthogonal. Les éléments de  $D$  sont les vecteurs de la forme  ${}^t(\lambda, \lambda)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Donc le vecteur  ${}^t(y_1, y_2)$  est dans  $D^\perp$  si et seulement si

$$\Phi({}^t(\lambda, \lambda), {}^t(y_1, y_2)) = \lambda y_1 - \lambda y_2 = 0$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Clairement, cette condition est équivalente à  $y_1 = y_2$  et donc  $D^\perp = D$ .

Sur  $\mathbb{R}^4$ , on considère la forme bilinéaire :

$$\Psi({}^t(x_1, x_2, x_3, x_4), {}^t(y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1y_1 - x_2y_2.$$

On note  $F$  le plan défini par les équations :

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = 0, \\ v_4 = 0. \end{cases}$$

Ainsi,  $F$  est l'ensemble des vecteurs  ${}^t(\lambda, \lambda, \mu, 0)$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Maintenant, un vecteur  ${}^t(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$  est dans  $F^\perp$  si et seulement si :

$$\Psi({}^t(\lambda, \lambda, \mu, 0), {}^t(y_1, y_2, y_3, y_4)) = \lambda(y_1 - y_2) = 0$$

pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Donc l'orthogonal  $F^\perp$  de  $F$  est l'hyperplan défini par l'équation

$$y_1 = y_2,$$

c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs  ${}^t(\lambda, \lambda, \mu, \nu)$  avec  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Maintenant, il est facile de voir que l'orthogonal de  $F^\perp$  est  $F^\perp$  lui-même et donc  $F^{\perp\perp} \neq F$ . Notons que ceci implique que  $\Psi$  est dégénérée par le théorème précédent, ce qui est facile à voir car, par exemple,  ${}^t(0, 0, 1, 0)$  est dans le noyau de  $\Psi$ .

**Corollaire 2.10.** *Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On a  $E = F \oplus F^\perp$  si et seulement si  $F \cap F^\perp = \{0\}$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $E = F \oplus F^\perp$ . Alors, on a  $F \cap F^\perp = \{0\}$  par définition. Réciproquement, supposons que  $F \cap F^\perp = \{0\}$ . Il est facile de voir que  $F \cap \text{Ker } \Phi \subset F \cap F^\perp$  et donc  $F \cap \text{Ker } \Phi = \{0\}$ . Il suit par le théorème que  $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$  ce qui implique, avec  $F \cap F^\perp = \{0\}$ , que  $E = F \oplus F^\perp$ .  $\square$

## 2.3 Formes quadratiques

### 2.3.1 Premières définitions

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Une application de  $q : E \rightarrow \mathbb{K}$  est une **forme quadratique** s'il existe une forme bilinéaire  $\Phi$  sur  $E$  avec

$$q(x) = \Phi(x, x)$$

pour tout  $x \in E$ .

On remarque qu'une forme quadratique *n'est pas* une application linéaire. En effet, pour  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a :

$$q(\lambda x) = \Phi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \Phi(x, x) = \lambda^2 q(x).$$

Notons que la forme quadratique  $q$  est nulle si et seulement si  $\Phi$  est alternée.

On note  $Q(E)$  l'ensemble des formes quadratiques sur  $E$ . On vérifie directement que  $Q(E)$  est un sous-espace vectoriel.

**Exemple.** Posons  $E = \mathbb{R}^2$  et

$$\Phi_1(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 - 2x_2 y_1$$

où  $x = {}^t(x_1, x_2)$  et  $y = {}^t(y_1, y_2)$  sont deux vecteurs de  $E$ . La forme quadratique correspondante est

$$q(x) = \Phi_1(x, x) = x_1 x_1 + x_1 x_2 - 2x_2 x_1 = x_1^2 - x_1 x_2.$$

Notons que la forme bilinéaire

$$\Phi_2(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2$$

définit la même forme quadratique.

Comme remarqué dans l'exemple précédent, plusieurs formes bilinéaires différentes peuvent définir la même forme quadratique. Cependant, on peut associer à chaque forme quadratique une *unique* forme bilinéaire *symétrique*.

**Proposition 2.11.** *L'espace vectoriel  $Q(E)$  est isomorphe à  $\text{Sym}_2(E)$ , l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur  $E$ , par l'application qui associe à une forme quadratique  $q$  la forme bilinéaire symétrique, appelée **forme polaire** de  $q$ , et définie par*

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} (q(x + y) - q(x) - q(y)).$$

*Démonstration.* On considère l'application  $d : L_2(E) \rightarrow Q(E)$  qui associe à une forme bilinéaire  $\Phi$  la forme quadratique  $q(x) = \Phi(x, x)$ . On vérifie directement que c'est une application linéaire. Elle est surjective par définition. Son noyau est clairement le sous-espace vectoriel  $\text{Alt}_2(E)$  des formes bilinéaires alternées. Puisque  $L_2(E) = \text{Sym}_2(E) \oplus \text{Alt}_2(E)$ , on en déduit que la restriction de  $d$  à  $\text{Sym}_2(E)$  est un isomorphisme. Cela montre qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique  $Q$  associée à  $q$ . Pour trouver l'expression de  $Q$ , on calcule

$$\begin{aligned} q(x + y) &= Q(x + y, x + y) = Q(x, x) + Q(x, y) + Q(y, x) + Q(y, y) \\ &= q(x) + 2Q(x, y) + q(y). \end{aligned} \quad \square$$

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $\Phi$  une forme bilinéaire (arbitraire) telle que  $q(x) = \Phi(x, x)$  et  $A$  la matrice de  $\Phi$  sur la base  $\mathcal{B}$ . On a donc

$$q(x) = {}^t X A X.$$

On calcule

$$\begin{aligned}
 Q(x, y) &= \frac{1}{2} [{}^t(X + Y)A(X + Y) - {}^tXAX - {}^tYAY] \\
 &= \frac{1}{2} [({}^tX + {}^tY)A(X + Y) - {}^tXAX - {}^tYAY] \\
 &= \frac{1}{2} [{}^tXAX + {}^tXAY + {}^tYAX + {}^tYAY - {}^tXAX - {}^tYAY] \\
 &= \frac{1}{2} [{}^tXAY + {}^tYAX].
 \end{aligned}$$

Notons que  ${}^tXAY$  et  ${}^tYAX$  sont en fait des matrices de type 1, c'est-à-dire des éléments de  $\mathbb{K}$ . En particulier, on a  ${}^tYAX = {}^t({}^tYAX) = {}^tX{}^tAY$ , et ainsi

$$Q(x, y) = {}^tX \frac{1}{2} (A + {}^tA) Y.$$

Donc la matrice de  $Q$  est  $\frac{1}{2} (A + {}^tA)$ . La **matrice** de  $q$  sur une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  est par définition la matrice de la forme bilinéaire  $Q$  sur  $\mathcal{B}$ . Ainsi, cette matrice est *toujours* symétrique.

**Exemple.** La forme polaire  $Q$  de la forme quadratique  $q$  définie dans l'exemple précédent peut être calculée en utilisant la méthode donnée dans la preuve ci-dessus. On calcule la matrice  $A_1$  de la forme bilinéaire  $\Phi_1$  définissant  $q$ , on trouve

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice  $B$  de la forme polaire  $Q$  est donnée par

$$B = \frac{1}{2} (A_1 + {}^tA_1) = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on trouve

$$Q(x, y) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 - \frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1.$$

On trouve évidemment la même expression si on part de la forme bilinéaire  $\Phi_2$  puisqu'elle définit aussi  $q$ .

Une autre manière de calculer la forme polaire à partir de l'expression de la forme quadratique  $q$  est d'utiliser la règle suivante : on remplace dans l'expression les termes de la forme  $\lambda x_i^2$  (termes carrés) par  $\lambda x_i y_i$  et les termes de la forme  $\mu x_i x_j$  avec  $i \neq j$  (termes rectangles) par  $\frac{1}{2}\mu(x_i y_j + x_j y_i)$ . Ainsi dans l'expression

$$q(x) = x_1^2 - x_1 x_2,$$

le terme  $x_1^2$  devient  $x_1 y_1$  et le terme  $-x_1 x_2$  devient  $-\frac{1}{2}x_1 y_2 - \frac{1}{2}x_2 y_1$ .

On appelle **espace quadratique** un couple  $(E, q)$  formée d'un espace vectoriel  $E$  (de dimension finie) et d'une forme quadratique  $q$  sur  $E$ .

### 2.3.2 Autres invariants d'une forme quadratique

On définit le **noyau** et le **rang** de  $q$  comme le noyau et le rang de  $Q$ . La forme quadratique  $q$  est **dégénérée** si  $\text{Ker } q \neq \{0\}$ , sinon  $q$  est **non dégénérée** (ou **régulière**). Un vecteur  $x$  est dit **isotrope** si  $q(x) = 0$ . Si la forme quadratique  $q$  admet un vecteur isotrope *non nul*, on dit que  $q$  est **isotrope**. L'ensemble  $C(q)$  formé des vecteurs isotropes de  $q$  est le **cône isotrope** de  $q$ . En général, ce n'est *pas* un sous-espace vectoriel (mais c'est un cône, c'est-à-dire stable par multiplication par un élément de  $\mathbb{K}$ ). Il contient toujours le noyau de  $q$ .

**Exemple.** Soit  $q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 = 2x_1(x_1 + x_2)$ . La matrice de  $q$  (sur la base canonique) est  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Puisqu'elle est de déterminant non nul, on a  $\text{Ker } q = \{0\}$ . D'un autre côté, on voit que  $q$  est isotrope puisque les vecteurs  ${}^t(0, 1)$  et  ${}^t(1, -1)$  sont isotropes pour  $q$ . (Remarque : le vecteur  ${}^t(0, 1) + {}^t(1, -1) = {}^t(1, 0)$  n'est pas isotrope.)

## 2.4 Réduction des formes quadratiques

### 2.4.1 Bases duales et contradictuales

On rappelle que  $E^*$ , appelé espace dual de  $E$ , est l'espace des formes linéaires de  $E$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Les **formes coordonnées**  $\xi_1, \dots, \xi_n$  pour la base  $\mathcal{B}$  sont les éléments de  $E^*$  définies de la manière suivante : pour tout  $x \in E$ , on peut écrire de manière unique

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

et on pose pour  $1 \leq i \leq n$  :

$$\xi_i(x) = \lambda_i.$$

On a donc

$$x = \xi_1(x)e_1 + \dots + \xi_n(x)e_n.$$

Les formes coordonnées vérifient les équations

$$\xi_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exemple.** On pose  $E = \mathbb{R}^3$  et on considère la base  $(e_1, e_2, e_3)$  avec

$$e_1 = {}^t(1, 0, -1), \quad e_2 = {}^t(0, 2, 1), \quad e_3 = {}^t(0, 0, 1).$$

On calcule la forme  $\xi_1$ . Pour  $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ , comme  $\xi_1$  est une forme linéaire, elle est de la forme  $\xi_1(x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$  avec  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  à déterminer. On doit avoir

$$\begin{cases} \xi_1(e_1) = 1 \\ \xi_1(e_2) = 0 \\ \xi_1(e_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On a donc  $\xi_1(x) = x_1$ . On trouve de même  $\xi_2(x) = \frac{1}{2}x_2$  et  $\xi_3(x) = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3$ .

**Proposition 2.12.** *La famille  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  est une base de  $E^*$ . On l'appelle la **base duale** de  $\mathcal{B}$  et on la note  $\mathcal{B}^*$ .*

*Démonstration.* Montrons que c'est une famille libre de  $E^*$ . Soit une combinaison

$$\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n = 0_{E^*}$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ . La relation précédente signifie que

$$\lambda_1 \xi_1(x) + \dots + \lambda_n \xi_n(x) = 0$$

pour tout  $x \in E$ . Maintenant, pour  $1 \leq i \leq n$ , on trouve

$$\lambda_1 \xi_1(e_i) + \dots + \lambda_n \xi_n(e_i) = \lambda_i = 0,$$

et donc tous les coefficients de la relation sont nuls, ce qui prouve que la famille est libre.

Montrons à présent que cette famille est génératrice. Soit  $f$  un élément de  $E^*$ . Pour tout  $i = 1, \dots, n$ , on pose

$$\mu_i = f(e_i)$$

et on vérifie directement que

$$f = \mu_1 \xi_1 + \dots + \mu_n \xi_n. \quad \square$$

**Proposition 2.13.** *Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  deux bases de  $E$ . Soient  $\mathcal{B}^*$  et  $\mathcal{C}^*$  les bases duales correspondantes. On note  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{C}$ . Alors, la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}^*$  à la base  $\mathcal{C}^*$  est  ${}^t P^{-1}$ .*

*Démonstration.* On note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $\mathcal{C} = (e'_1, \dots, e'_n)$ ,  $\mathcal{B}^* = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Par définition, on a pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$

$$e'_j = p_{1,j} e_1 + \dots + p_{n,j} e_n$$

où  $P = (p_{i,j})$ . Pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on définit

$$\chi_j = q_{1,j} \xi_1 + \dots + q_{n,j} \xi_n$$

où  ${}^t P^{-1} = (q_{i,j})$ . On calcule

$$\chi_i(e'_j) = \sum_{k=1}^n q_{k,i} \xi_k(e'_j) = \sum_{k=1}^n q_{k,i} \sum_{l=1}^n p_{l,j} \xi_k(e_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{k,i} p_{l,j} \xi_k(e_l) = \sum_{k=1}^n q_{k,i} p_{k,j}.$$

Et ainsi on obtient  $\chi_i(f_j) = \delta_{i,j}$  donc la base  $(\chi_1, \dots, \chi_n)$  est la base duale de  $\mathcal{C}$  ce qui prouve le résultat.  $\square$

**Corollaire 2.14.** *Soit  $\mathcal{F}$  une base de  $E^*$ . Alors il existe une unique base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que la base  $\mathcal{F}$  est la base duale de  $\mathcal{B}$ . La base  $\mathcal{B}$  s'appelle la **base contraduale** de  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* On note  $\mathcal{C}$  une base quelconque de  $E$  et  $\mathcal{C}^*$  sa base duale. On note  $M$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{C}^*$  à la base  $\mathcal{F}$ . Alors, la base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que la matrice de passage de la base  $\mathcal{C}$  à la base  $\mathcal{B}$  est  ${}^t M^{-1}$  est la base contraduale de  $\mathcal{F}$ .  $\square$



**Exemple.** On pose  $E = \mathbb{R}^3$ . On considère la base  $(f_1, f_2, f_3)$  de  $E^*$  avec

$$f_1(x) = x_1 - x_2 \quad f_2(x) = -x_3, \quad f_3(x) = x_1 + x_2 + x_3.$$

On calcule la base contraduale  $(e_1, e_2, e_3)$ . On pose  $e_1 = {}^t(x_1, x_2, x_3)$  avec  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  à déterminer. On doit avoir

$$\begin{cases} f_1(e_1) = 1 \\ f_2(e_1) = 0 \\ f_3(e_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = -1/2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

On a donc  $e_1 = {}^t(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ . On trouve de même  $e_2 = {}^t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$  et  $e_3 = {}^t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ .

## 2.4.2 Formulations du problème

Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ . Notons  $Q$  sa forme polaire. Le problème de la **réduction** de  $q$  est de trouver une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $q$ , c'est-à-dire par définition la matrice de  $Q$ , est *diagonale*. Dans une telle base, on a alors

$$Q(e_i, e_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j,$$

c'est-à-dire  $e_i \perp e_j$  si  $i \neq j$ . On dit que la base  $\mathcal{B}$  est **orthogonale** (relativement à  $q$ ).

**Exemple.** La base canonique de  $\mathbb{K}^n$  est orthogonale pour la forme quadratique  $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

En terme de matrices, notons  $A$  la matrice de  $q$  par rapport à une base fixée  $\mathcal{C}$  de  $E$ . Réduire  $q$  revient à chercher une matrice  $P$  inversible telle que la matrice

$${}^tPAP$$

est diagonale. La matrice  $P$  est alors la matrice de passage de la base  $\mathcal{C}$  à une base orthogonale pour  $q$ .

Finalement, en termes algébriques, réduire  $q$  revient à trouver une base dans laquelle l'expression de  $q$  sous la forme

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Réduire  $q$  revient aussi à décomposer le polynôme quadratique homogène  $P(x_1, \dots, x_n)$  représentant  $q$  par rapport à une base fixée  $\mathcal{C}$  en une somme de carrés de formes linéaires indépendantes

$$P(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 f_1(x_1, \dots, x_n)^2 + \dots + \lambda_n f_n(x_1, \dots, x_n)^2.$$

Dans ce cas, on dit que la forme  $q$  est **décomposée en somme de carrés de formes linéaires indépendantes** ou juste **décomposée**.

**Proposition 2.15.** Soit  $q$  une forme quadratique et soient  $f_1, \dots, f_n$  des formes linéaires indépendantes telles que

$$q(x) = \lambda_1 f_1(x)^2 + \dots + \lambda_n f_n(x)^2.$$

Alors, la base contraduale de la base  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $E^*$  est une base orthogonale pour  $q$ .

*Démonstration.* Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  les vecteurs de la base contraduale de la base  $(f_1, \dots, f_n)$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $q(e_i) = \lambda_i$ . Maintenant, pour  $i \neq j$ , on a

$$Q(e_i, e_j) = \frac{1}{2} [q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j)] = \frac{1}{2} [\lambda_i + \lambda_j - \lambda_i - \lambda_j] = 0. \quad \square$$

**Théorème 2.16.** *Toute forme quadratique admet une base orthogonale.*

*Démonstration.* On démontre le résultat par récurrence sur la dimension de  $E$ . Supposons que  $\dim E = 1$ . Alors toute base de  $E$  est orthogonale pour  $q$  et le résultat est démontré.

Supposons à présent que le résultat est démontré pour la dimension  $m$  avec  $m \geq 1$  fixé. On considère  $q$  une forme quadratique sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $m+1$ . On note  $Q$  la forme polaire associée à  $q$ . Si  $q$  est la forme quadratique nulle, c'est-à-dire  $q(x) = 0$  pour tout  $x \in E$ , alors toutes les bases de  $E$  sont orthogonales pour  $q$ . Sinon, il existe un vecteur  $a \in E$  tel que  $q(a) \neq 0$ . On pose  $H$  le sous-espace vectoriel engendré par  $a$  et  $H^\perp$  l'orthogonal de  $H$  par rapport à  $Q$ . Le sous-espace vectoriel  $H$  est non isotrope car sinon il existe un élément  $b$  non nul dans  $H \cap H^\perp$ , d'où  $b = \lambda a$  pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \neq 0$  et  $Q(a, b) = \lambda Q(a, a) = 0$ , ainsi  $q(a) = 0$ , contradiction. Donc  $H$  est non isotrope et il suit par le Corollaire 2.10 que  $E = H \oplus H^\perp$ . Maintenant, notons  $p$  la restriction de  $q$  à  $H^\perp$  et  $P$  la forme polaire de  $p$ . En fait, il est facile de voir que  $P$  est la restriction de  $Q$  à  $H^\perp \times H^\perp$ . Puisque  $\dim H^\perp = \dim E - \dim H = m$ , l'hypothèse de récurrence implique qu'il existe une base  $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_m)$  de  $H^\perp$  orthogonale pour  $p$ . Alors,  $\mathcal{B} = (a, e_1, \dots, e_m)$  est une base orthogonale de  $E$ . En effet,  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  car c'est l'union d'une base de  $H$  et de  $H^\perp$ . Puis on a  $Q(e_i, e_j) = P(e_i, e_j) = 0$  pour  $i \neq j$ , et de plus  $Q(a, e_i) = 0$  pour tout  $i$  puisque  $a \in H$  et  $e_i \in H^\perp$ . Donc  $\mathcal{B}$  est bien une base orthogonale pour  $q$  et le résultat est démontré pour la dimension  $m+1$ .  $\square$

### 2.4.3 Réduction de Gauss

L'algorithme suivant, inventé par Gauss, permet de décomposer n'importe quel polynôme quadratique homogène en somme de carrés de formes linéaires indépendantes. Nous commençons par expliquer cette méthode sur deux exemples.

**Exemples.** On considère le polynôme quadratique homogène

$$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 14x_2x_4 + 5x_3^2 - 8x_3x_4 + 10x_4^2.$$

On commence par travailler avec les termes carrés, par exemple le terme  $x_1^2$ . On va compléter le carré commençant par  $x_1^2$ . Pour cela on commence par mettre  $2x_1$  en facteur

$$q(x) = x_1^2 + 2x_1(-x_2 + 2x_3 - x_4) + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 14x_2x_4 + 5x_3^2 - 8x_3x_4 + 10x_4^2$$

et on utilise la formule suivante

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_k)^2 &= (\text{somme des carrés}) + 2(\text{somme des doubles produits}) \\ &= a_1^2 + \dots + a_k^2 + 2a_1a_2 + \dots + 2a_1a_k + 2a_2a_3 + \dots + 2a_{k-1}a_k. \end{aligned}$$

Ainsi les termes  $x_1^2 + 2x_1(-x_2 + 2x_3 - x_4)$  forment le début du développement de

$$(x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4.$$

De surcroît, les termes manquant ne font plus intervenir  $x_1$  et donc si on remplace, on obtient

$$q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 12x_2x_4 + x_3^2 - 4x_3x_4 + 9x_4^2,$$

c'est-à-dire une expression de  $q$  sous la forme d'une somme entre le carré d'une forme linéaire  $f_1(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$ , plus un polynôme quadratique homogène qui ne fait plus intervenir la variable  $x_1$ .

On continue le procédé avec la variable  $x_2$ . On écrit

$$q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4\left(x_2^2 + 2x_2\left(-\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4\right)\right) + x_3^2 - 4x_3x_4 + 9x_4^2,$$

et donc on a fait apparaître le début de

$$\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4\right)^2 = x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 + \frac{9}{4}x_4^2 - x_2x_3 + 3x_2x_4 - \frac{3}{2}x_3x_4.$$

En remplaçant dans l'expression de  $q$ , on trouve

$$q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4\right)^2 + 2x_3x_4.$$

On ne peut plus à présent appliquer la même méthode puisqu'il n'y a plus de carrés dans la partie à réduire. Dans ce cas, on utilise l'identité suivante

$$ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2],$$

ce qui nous donne finalement

$$q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4\right)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_3 + x_4)^2.$$

On peut vérifier sans difficultés que les formes linéaires de cette décomposition sont bien indépendantes.

Considérons à présent le polynôme quadratique homogène

$$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + 3x_2x_4 + 9x_3x_4.$$

Il faut utiliser la deuxième technique puisqu'il n'y a pas de termes carrés. Cependant, ici la situation est moins simple que dans le cas précédent puisqu'il ne suffit pas d'appliquer la formule donnée ci-dessus pour faire "disparaître" les variables. On procède de la manière suivante : on choisit deux variables, par exemple les variables  $x_1$  et  $x_2$ . On groupe les termes en écrivant le terme en  $x_1x_2$  puis les termes où ces variables interviennent en factorisant  $x_1$  et  $x_2$

$$q(x) = x_1x_2 + x_1(2x_3 - x_4) + x_2(x_3 + 3x_4) + 9x_3x_4.$$

On utilise à présent l'identité

$$uv + ua + vb = (u+b)(v+a) - ab$$

et on déduit

$$x_1x_2 + x_1(2x_3 - x_4) + x_2(x_3 + 3x_4) = (x_1 + x_3 + 3x_4)(x_2 + 2x_3 - x_4) - (2x_3 - x_4)(x_3 + 3x_4).$$

On remplace et on simplifie pour obtenir

$$q(x) = (x_1 + x_3 + 3x_4)(x_2 + 2x_3 - x_4) - 2x_3^2 + 4x_3x_4 + 3x_4^2$$

et on utilise la formule donnée ci-dessus

$$q(x) = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4)^2 - 2x_3^2 + 4x_3x_4 + 3x_4^2$$

On termine la réduction en utilisant la première méthode. Les termes  $-2x_3^2 + 4x_3x_4$  forment le début de

$$-2(x_3 - x_4)^2 = -2x_3^2 + 4x_3x_4 - 2x_4^2.$$

On remplace et on obtient l'expression :

$$q(x) = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4)^2 - 2(x_3 - x_4)^2 + 5x_4^2.$$

Pour un polynôme quadratique donné, la réduction de Gauss consiste donc à utiliser plusieurs fois l'une ou l'autre des deux techniques suivantes jusqu'à ce que la réduction soit terminée

- S'il existe un terme  $x_i^2$  dans l'expression, par exemple  $x_1^2$ , on écrit le polynôme sous la forme

$$q(x_1, \dots, x_n) = \lambda x_1^2 + x_1 f(x_2, \dots, x_n) + q'(x_2, \dots, x_n)$$

avec  $\lambda \neq 0$ ,  $f$  une forme linéaire et  $q'$  un polynôme quadratique homogène. Puis on fait les transformations suivantes

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \left[ x_1^2 + x_1 \frac{f(x_2, \dots, x_n)}{\lambda} \right] + q'(x_2, \dots, x_n) \\ &= \lambda \left[ x_1 + \frac{f(x_2, \dots, x_n)}{2\lambda} \right]^2 + q'(x_2, \dots, x_n) - \frac{f(x_2, \dots, x_n)^2}{4\lambda} \end{aligned}$$

On pose

$$s(x_2, \dots, x_n) = q'(x_2, \dots, x_n) - \frac{f(x_2, \dots, x_n)^2}{4\lambda}$$

et on est ramené à la réduction du polynôme quadratique homogène  $s$  qui comporte une variable de moins.

- S'il n'y a pas de termes carrés, on sélectionne un terme en  $x_i x_j$  avec  $i \neq j$ , par exemple  $x_1 x_2$ , et on met  $q$  sous la forme

$$q(x_1, \dots, x_n) = \lambda x_1 x_2 + x_1 f(x_3, \dots, x_n) + x_2 g(x_3, \dots, x_n) + q'(x_3, \dots, x_n)$$

où  $\lambda \neq 0$ ,  $f$  et  $g$  sont des formes linéaires et  $q'$  est un polynôme quadratique homogène. Puis, on fait les transformations suivantes

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \left[ x_1 x_2 + x_1 \frac{f(x_3, \dots, x_n)}{\lambda} + x_2 \frac{g(x_3, \dots, x_n)}{\lambda} \right] + q'(x_3, \dots, x_n) \\ &= \lambda \left[ \left( x_1 + \frac{g}{\lambda} \right) \left( x_2 + \frac{f}{\lambda} \right) \right] + q' - \frac{fg}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{4} \left[ \left( x_1 + x_2 + \frac{f+g}{\lambda} \right)^2 - \left( x_1 - x_2 + \frac{g-f}{\lambda} \right)^2 \right] + s \end{aligned}$$

où  $s = q' - fg/\lambda$  est un polynôme quadratique homogène avec deux variables de moins que  $s$ .

La validité de l'algorithme est assurée par le théorème suivant.

**Théorème 2.17.** *L'algorithme de Gauss calcule une décomposition en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur le nombre de variables. S'il y a une seule variable, alors le résultat est démontré puisque dans ce cas tout polynôme quadratique homogène est de la forme  $\lambda x_1^2$ . Maintenant, soit  $n \geq 1$ . Supposons que la méthode de Gauss appliquée à un polynôme quadratique homogène avec au plus  $n$  variables renvoie bien une décomposition en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

On considère un polynôme quadratique homogène  $q$  en  $n + 1$  variables. On suppose  $q$  non nul car sinon le résultat est évident. Supposons que l'on se trouve dans le premier cas, c'est-à-dire  $q$  contient un terme en  $x_i^2$ , par exemple  $x_1^2$ . Alors on calcule une décomposition

$$q(x_1, \dots, x_{n+1}) = \lambda t(x_1, \dots, x_{n+1})^2 + s(x_2, \dots, x_{n+1})$$

avec  $t$  une forme linéaire et  $s$  un polynôme quadratique homogène. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut décomposer  $s$  en somme de formes linéaires indépendantes  $f_1, \dots, f_n$  ne faisant intervenir que les variables  $x_2, \dots, x_{n+1}$ . Maintenant, en regardant l'expression de  $t_1$  donnée par la méthode, on trouve que la matrice de la famille  $(t, f_1, \dots, f_n)$  sur les variables  $x_1, \dots, x_{n+1}$  est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où  $A$  est la matrice de la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  sur les variables  $x_2, \dots, x_{n+1}$ . En particulier, le déterminant de  $M$  est égal au déterminant de  $A$  qui est non nul puisque les  $f_1, \dots, f_n$  sont indépendantes. Donc les formes linéaires de la décomposition de  $q$  sont indépendantes.

De même, dans le deuxième cas, on a une décomposition de la forme

$$q(x_1, \dots, x_{n+1}) = \lambda [t_1(x_1, \dots, x_{n+1})^2 - t_2(x_1, \dots, x_{n+1})^2] + s(x_3, \dots, x_{n+1}).$$

L'hypothèse de récurrence affirme qu'on peut décomposer  $s$  en somme de formes linéaires indépendantes  $f_1, \dots, f_{n-1}$  ne faisant intervenir que les variables  $x_3, \dots, x_{n+1}$ . Les formes particulières de  $t_1$  et  $t_2$  donnent que la matrice de la famille  $(t_1, t_2, f_1, \dots, f_{n-1})$  sur les variables  $x_1, \dots, x_{n+1}$  est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * & \cdots & * \\ 1 & -1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

où  $A$  est la matrice de la famille  $(f_1, \dots, f_{n-1})$  sur les variables  $x_3, \dots, x_{n+1}$ . En particulier, le déterminant de  $M$  est égal  $-2 \det A$  qui est non nul puisque les  $f_1, \dots, f_{n-1}$  sont indépendantes. Donc les formes linéaires de la décomposition de  $q$  sont indépendantes.  $\square$

#### 2.4.4 Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

Deux formes quadratiques sur un espace vectoriel  $E$  sont dites **équivalentes** si ils existent des bases de  $E$  sur lesquelles elles ont la même matrice.

On commence par un résultat général sur le rang des formes quadratiques.

**Théorème 2.18.** *Soit  $q$  une forme quadratique. Les trois quantités suivantes sont égales*

- a. *Le rang de  $q$  ;*
- b. *Le nombre de vecteurs non isotropes dans une base orthogonale de  $q$  ;*
- c. *Le nombre de formes linéaires apparaissant avec un coefficient non nul dans une décomposition de  $q$  en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.*

*Démonstration.* Commençons par démontrer que  $a. = b.$  On note  $Q$  la forme polaire de  $q$  et  $r$  son rang. On a  $\dim \text{Ker } Q = n - r$  par le théorème du rang. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  orthogonale pour  $q$ . Notons  $t$  le nombre de vecteurs non isotropes et ordonnons les vecteurs de la base de telle sorte que les  $t$  premiers vecteurs sont non isotropes. La matrice de  $Q$  sur la base  $\mathcal{B}$  est diagonale avec les premiers  $t$  coefficients non nuls et les autres nuls. Il est donc clair que  $r = t$ .

On montre à présent que  $b. = c.$  Soit

$$q(x) = \lambda_1 f_1(x)^2 + \dots + \lambda_s f_s(x)^2$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  non nuls, une décomposition de  $q$  en somme de carrés de formes linéaires indépendantes. On complète la famille  $(f_1, \dots, f_s)$  en une base  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $E^*$ . On pose  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base contraduale, c'est une base orthogonale pour  $q$ . Calculons

$$q(e_i) = \lambda_1 f_1(e_i)^2 + \dots + \lambda_s f_s(e_i)^2.$$

On a  $f_j(e_i) = 0$  si  $i \neq j$  et  $f_i(e_i) = 1$ , et ainsi, on trouve que  $q(e_i) = 0$  pour  $i > s$  et  $q(e_i) = \lambda_i \neq 0$  pour  $i \leq s$ . Ainsi le nombre de vecteurs non isotropes de la base  $\mathcal{B}$  est  $s$  et l'égalité est démontrée.  $\square$

On en déduit la classification des formes quadratiques sur  $\mathbb{C}$ .

**Corollaire 2.19.** *Soit  $q$  une forme quadratique sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Soit  $r$  le rang de  $q$ . Alors il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  pour laquelle on a*

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2.$$

avec  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ .

*Ainsi, deux formes quadratiques de  $E$  sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

*Démonstration.* Soit  $(e'_1, \dots, e'_n)$  une base orthogonale de  $E$ . Par le théorème, on peut supposer que  $e'_1, \dots, e'_r$  sont non isotropes et  $e'_{r+1}, \dots, e'_n$  sont isotropes. Pour  $i = 1, \dots, r$ , il existe  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha_i \neq 0$ , tels que  $\alpha_i^2 = q(e'_i)$ . On pose  $e_i = e'_i/\alpha_i$  pour  $i = 1, \dots, r$  et  $e_i = e'_i$  pour  $i = r+1, \dots, n$ . Il est clair que  $q$  a bien l'expression voulue sur cette base.  $\square$

On s'intéresse à présent au cas des formes quadratiques sur  $\mathbb{R}$ . Dans une décomposition de  $q$  en somme de carrées de formes linéaires indépendantes, on note  $s$  le nombre de formes avec un coefficient strictement positif et  $t$  le nombre de formes avec un coefficient strictement négatif. On appelle le couple  $(s, t)$  la **signature** de  $q$ .

**Théorème 2.20** (Sylvester). *Soit  $q$  une forme quadratique de signature  $(s, t)$ . Alors, la signature ne dépend pas du choix de la décomposition. De plus, on a*

1. *Dans une base orthogonale pour  $q$ , il y a  $s$  vecteurs dont l'image par  $q$  est strictement positive et  $t$  dont l'image par  $q$  est strictement négative.*
2. *Il existe des sous-espaces vectoriels  $E^+$  et  $E^-$  tels que*
  - $\dim(E^+) = s$ ,  $\dim(E^-) = t$ ,
  - $E = E^+ \oplus E^- \oplus E^\perp$ ,
  - $q(x) > 0$  pour tout  $x \in E^+ \setminus \{0\}$ ,
  - $q(x) < 0$  pour tout  $x \in E^- \setminus \{0\}$ .
3. *Le rang de  $q$  est  $s + t$ .*  $\square$

On en déduit la classification des formes quadratiques réelles.

**Proposition 2.21.** *Soit  $q$  une forme quadratique sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Soit  $(s, t)$  la signature de  $q$ . Alors il existe une base de  $E$  pour laquelle on a*

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$$

avec  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ .

*Ainsi, deux formes quadratiques de  $E$  sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.*  $\square$

Une forme quadratique  $q$  est dite **positive** (resp. **négative**) si elle vérifie  $q(x) \geq 0$  (resp.  $q(x) \leq 0$ ) pour tout  $x \in E$ . Si, de plus, la forme quadratique  $q$  vérifie  $q(x) \neq 0$  pour tout  $x \neq 0$ , alors elle est dite **définie positive** (resp. **définie négative**).

**Proposition 2.22.** *Soit  $q$  une forme quadratique sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .*

- *$q$  est positive si et seulement si elle est de signature  $(m, 0)$  avec  $0 \leq m \leq n$ .*
- *$q$  est négative si et seulement si elle est de signature  $(0, m)$  avec  $0 \leq m \leq n$ .*
- *$q$  est définie positive si et seulement si elle est de signature  $(n, 0)$ .*
- *$q$  est définie négative si et seulement si elle est de signature  $(0, n)$ .*  $\square$

Soit  $q$  une forme quadratique définie (positive ou négative), on remarque que  $q$  est non dégénérée car sinon il existe un vecteur  $x$  non nul dans  $\text{Ker } q$ , donc  $x$  est isotrope, c'est-à-dire  $x \neq 0$  et  $q(x) = 0$  ce qui donne une contradiction.

## 2.5 Espaces euclidiens

### 2.5.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Théorème 2.23.** *Soit  $q$  une forme quadratique de  $E$ . On suppose  $q$  positive et on note  $Q$  sa forme polaire. Pour tous  $x, y \in E$ , on a*

$$Q(x, y)^2 \leq q(x)q(y).$$

*De plus, si  $q$  est définie positive, on a égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.*

*Démonstration.* Soit  $t \in \mathbb{R}$ , on considère le polynôme  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$\begin{aligned} f(t) = q(x + ty) &= Q(x + ty, x + ty) \\ &= Q(x, x) + Q(ty, ty) + 2Q(x, ty) \\ &= q(x) + t^2q(y) + 2tQ(x, y). \end{aligned}$$

Puisque  $q$  est positive, on a  $f(t) \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $y$  est isotrope, alors le polynôme  $f$  est de degré  $\leq 1$  et ne change pas de signe. Ceci n'est possible que s'il est constant et donc  $Q(x, y) = 0$ . On a alors trivialement l'inégalité. Si  $y$  n'est pas isotrope,  $f(t)$  est un polynôme de degré deux qui ne change pas de signe et donc son discriminant est négatif. On calcule

$$\Delta = (2Q(x, y))^2 - 4q(x)q(y) \leq 0,$$

et le résultat suit en divisant par 4 l'inégalité.

Supposons que  $q$  est définie positive. Si  $q(x) = 0$  alors  $x = 0$  et tout vecteur est colinéaire à  $x$ . Sinon, l'égalité implique que le discriminant s'annule et  $f(t)$  a une racine dans  $\mathbb{R}$ , disons  $t_0$ . On a donc  $f(t_0) = q(x + t_0y) = 0$  donc  $x = -t_0y$ , c'est-à-dire  $x$  et  $y$  sont colinéaires.  $\square$

**Corollaire 2.24.** *Soit  $q$  une forme quadratique positive, alors le noyau de  $q$  est égal au cône isotrope de  $q$ .*

*Démonstration.* On sait déjà que tout vecteur de  $\text{Ker } q$  est isotrope, il reste donc à montrer la réciproque : tout vecteur isotrope est dans  $\text{Ker } q$ . Soit  $x$  un vecteur isotrope, on obtient par le précédent théorème que, pour tout  $y \in E$ , on a

$$Q(x, y)^2 \leq q(x)q(y) = 0$$

d'où  $Q(x, y) = 0$  pour tout  $y \in E$  d'où  $x \in \text{Ker } q$ .  $\square$

Une application directe de ce corollaire est le résultat suivant

**Proposition 2.25.** *Soit  $q$  est une forme quadratique positive. Alors,  $q$  est non dégénérée si et seulement si  $q$  est définie.*  $\square$



## 2.5.2 Définitions et premières propriétés

On appelle **espace euclidien** un espace vectoriel réel  $E$  de dimension finie muni d'une forme quadratique définie positive  $q$ . On appelle la forme polaire de  $q$  le **produit scalaire** de  $E$  et on la note

$$\langle x, y \rangle.$$

Pour  $x \in E$ , on pose

$$\|x\| = \sqrt{q(x)} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

la **norme** de  $x$ .

Par les résultats précédents, on sait que le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

La norme vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\|x\| \geq 0$  pour tout  $x \in E$ ,
2.  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ ,
3.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  pour tout  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
4.  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$  pour tout  $x, y \in E$ ,
5.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  pour tout  $x, y \in E$ .

La propriété 1 vient de la définition de la norme comme racine carrée. Pour 2, on utilise le fait que  $q$  est définie. La propriété 3 vient du fait que  $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne 4. Finalement l'inégalité 5 est le résultat suivant.

**Théorème 2.26** (Inégalité triangulaire). *Pour tous  $x, y \in E$ , on a*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

*Démonstration.* On a d'une part

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= q(x + y) = q(x) + q(y) + 2\langle x, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a d'autre part

$$\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| = \sqrt{\langle x, y \rangle^2} \leq \sqrt{q(x)} \sqrt{q(y)} = \|x\| \|y\|.$$

En remplaçant, on trouve

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Donc on obtient l'inégalité voulue en prenant les racines carrées de chaque côté.  $\square$