# Fiche 2.

**Exercice 1.** Soient $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ deux points distincts du plan $\mathbb{R}^2$. Montrer que la droite $(AB)$ a pour équation

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0.$$

**Exercice 2.** Soient $u$ un endomorphisme nilpotent de $E$, un espace vectoriel de dimension fini, c'est-à-dire il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a $\ker u^{k-1} \subset \ker u^k$. En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel $F_k$ de $E$ tel que
$$\ker u^k = F_k \oplus \ker u^{k-1}.$$
2. Pour $k \geq 1$, montrer que $\ker u^k = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$. En déduire que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.
3. En prenant une base adaptée à la somme directe ci-dessus et en utilisant le fait que $u(\ker u^k) \subset \ker u^{k-1}$, montrer que la matrice de $u$ dans cette base est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls. En déduire que le déterminant de cette matrice est nul. Ce résultat était-il prévisible ?

**Exercice 3.** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Soit $a \in E$ non nul. Montrer que la famille $(a, f(a))$ est libre.
On pose $U(a) = \mathrm{Vect}(a, f(a))$.
2. Soit $F$ un sous-espace vectoriel stable par $f$.
Soit $a \in E \setminus F$. Montrer que $F \cap U(a) = \{0\}$.
3. Montrer qu'il existe des vecteurs non nuls $a_1, ..., a_p$ de $E$ tels que
$$E = U(a_1) \oplus \cdots \oplus U(a_p).$$
4. En déduire que la dimension de $E$ est paire et justifier l'existence d'une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ a une forme simple.

**Exercice 4.** Soient $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n \geq 2$. On suppose que $E$ est le seul sous-espace vectoriel non nul stable par $u$.

1. L'endomorphisme $u$ possède-t-il des valeurs propres ?
2. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, la famille $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de E. Quelle est la forme de la matrice de $u$ dans cette base ?
3. Montrer que cette matrice ne dépend pas du choix de $x$.

**Exercice 5.** Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$ et $A \neq 0$. Le but de cet exercice est de montrer que la matrice $A$ est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A$.

1. Montrer que $\mathrm{Im} u \subset \ker u$. En déduire le rang de $u$ et la dimension de $\ker u$.
2. Montrer qu'il existe une base $(a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{R}^3$ avec $u(a_1) = a_2$ et $u(a_2) = u(a_3) = 0$.
3. Conclure.

**Exercice 6.** Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $A^3 + A = 0$. Montrer que $A$ est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A$.

1. On pose $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : u^2(x) = -x\}$. En utilisant l'exercice 3, montrer que $\dim E = 0$ ou 2.
2. On suppose que $\dim E = 0$. On définit une application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $f(x) = u^2(x) + x$.
   (a) Justifier que $f$ est un endomorphisme. Montrer que $f$ est bijectif.
   (b) En déduire que $u = 0$ et donc que $\dim E = 2$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker u \oplus E$. Conclure.

**Exercice 7.** Soient $A$ et $B$ dans $M_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que $A$ et $B$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.