Fiche 3.

Exercice 1. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de u. En déduire que 0 est valeur propre de u.
2. Montrer que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de u.
3. Construire une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de u.

Exercice 2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $u(e_2)$, $u(e_1 + e_3)$ et $u(e_1 - e_3)$.
2. En déduire que u est diagonalisable et écrire la matrice de u dans une base de vecteurs propres.

Exercice 3. On considère la matrice $n \times n$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A^n = 0$.
2. En déduire que l'unique valeur propre de A est 0.

3. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 4. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u.
2. Montrer, sans calcul, qu'il existe une base de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres.
3. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base formée de vecteurs propres.
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$? sur le corps $\mathbb{Q}$?

Exercice 5. Diagonaliser, si c'est possible, les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ en donnant la matrice de passage :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Discuter en fonction de a, b et c dans $\mathbb{C}$ la possibilité de diagonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A, alors son conjugué $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A de même multiplicité.
2. Montrer que si v est un valeur propre associée à λ, alors son conjugué $\overline{v}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.

Exercice 8. Pour n un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$u(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

1. Ecrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable.
3. Résoudre l'équation $u(P) = P$.

Exercice 9. Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$u\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres de u.

Exercice 10. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En diagonalisant A, trouver une solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $X^2 = A$

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit u un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que la trace de u est une valeur propre de u.
2. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

Exercice 12. On considère la matrice complexe

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la somme des valeurs propres de A ?
2. Quel est le produit des valeurs propres de A ?

3. Montrer que si son déterminant n'est pas nul, A est diagonalisable.
4. Montrer que si son déterminant est nul, A n'est diagonalisable que si elle est nulle.
5. Montrer que A est diagonalisable sauf si elle de rang un.
6. En supposant que la matrice A est réelle, à quelles conditions est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?

Exercice 13. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que 3 est une valeur propre de A. En déduire les autres valeurs propres de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A.
3. Calculer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que
$$A = P\,D\,P^{-1}.$$
4. Calculer P^{-1} et en déduire A^{-1} à l'aide de la question précédente.
5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n + (-1)^n}{2} & 0 & \dfrac{3^n - (-1)^n}{2} \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ \dfrac{3^n - (-1)^n}{2} & 0 & \dfrac{3^n + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 14.
On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Construire une matrice P telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D.
2. Montrer qu'il existe une matrice E telle que $E^3 = D$.
   Calculer une matrice B telle que $B^3 = A$.