Fiche 4.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré au plus 2.

1. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & P(1)Q(-1) \end{array}$$

   est une forme bilinéaire. Écrire la matrice de Φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

2. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rcl} \Psi : E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x \end{array}$$

   est une forme bilinéaire. Écrire la matrice de Ψ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

Exercice 2. Montrer que toute forme bilinéaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}$ est de la forme $(x, y) \mapsto \lambda xy$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. On considère l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB).$$

Montrer que Φ est une forme bilinéaire symétrique.

Exercice 4. Soit E l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. On considère l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(A, B) = \det(A + B) - \det(A - B).$$

Montrer que Φ est une forme bilinéaire, puis calculer sa matrice relativement à la base canonique de E.

Exercice 5. Montrer que chacune des applications suivantes est une forme bilinéaire, calculer leur matrice dans la base canonique et leur noyau à gauche.

1. $n = 2$ et $\phi(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2$.
2. $n = 3$ et $\phi(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_2 - 2x_2y_3 - x_3y_1 - 2x_3y_3$.
3. $n = 3$ et $\phi(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2 - x_3y_3$.

Exercice 6. Sur $\mathbb{R}^3$, on définit l'application suivante

$$\Phi(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + \frac{1}{2}x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - 3y_2x_3 - 3x_2y_3$$

où $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ et $y = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que Φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. La forme Φ est-elle dégénérée ?
3. Soit H_1 le plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Déterminer l'orthogonal $H_1^\perp$ de H_1 respectivement à Φ.
4. Soit H_2 le plan d'équation $2x_2 + x_3 = 0$. Déterminer l'orthogonal $H_2^\perp$ de H_2 respectivement à Φ.

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère l'application

$$\Phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

où $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = {}^t(y_1, y_2, y_3, y_4)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

1. Prouver que Φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer le noyau, le rang de Φ.
3. Déterminer le cône isotrope de Φ, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in E$ tels que $\Phi(x, x) = 0$.
4. Soit
$$H = \left\{ {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \text{ tel que } x_1 = x_2 \text{ et } x_3 = x_4 \right\}.$$
Déterminer $H^\perp$ (resp. à Φ), puis $H \cap H^\perp$.

Exercice 8. On pose

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Justifier pourquoi il existe une unique forme bilinéaire symétrique Φ telle que $\Phi(v_1, v_1) = -1$, $\Phi(v_1, v_2) = 0$, $\Phi(v_1, v_3) = 2$, $\Phi(v_2, v_2) = 0$, $\Phi(v_2, v_3) = 1$ et $\Phi(v_3, v_3) = -2$.
3. Calculer la matrice de cette forme bilinéaire dans la base canonique.

Exercice 9. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} q : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t. \end{array}$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.
2. Quels sont les vecteurs isotropes de q ?
3. La forme q est-elle dégénérée ?
4. Soit F le sous-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2. Écrire la matrice de q (restreint à F) sur la base $(1, x, x^2)$ de F.

Exercice 10. On considère $E = \mathbb{R}^2$ et

$$\begin{array}{rccl} q : & E & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1^2 - 2x_1x_2. \end{array}$$

1. Montrer que q est une forme quadratique. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de E. Déterminer le rang et le noyau de q.
2. Déterminer le cône isotrope de q. Est-ce un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit q une application de E dans $\mathbb{K}$ telle que

- $q(2x) = 4q(x)$ pour tout $x \in E$;
- l'application Q de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ définie par :

  $$Q(x, y) = \tfrac{1}{2}\left[q(x + y) - q(x) - q(y)\right]$$

  est une forme bilinéaire.

Montrer que q est une forme quadratique.

Exercice 12. Donner la forme polaire, le noyau et le cône isotrope des formes quadratiques suivantes

$$\begin{array}{rcccl} q_1 & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y, z) & \mapsto & x^2 + y^2 - z^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} q_2 & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y, z) & \mapsto & (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \end{array}$$

Exercice 13. Décomposer en somme de carrés de formes linéaires indépendantes les formes quadratiques sur E suivantes. Donner le rang dans chaque cas.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $q(x) = x_1^2 - 3x_1x_2$.
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_1x_3$.
3. $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x) = (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2$.
4. $E = \mathbb{R}^4$ et $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4 + x_4x_1$.

Exercice 14. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de E. On considère la forme quadratique donnée par

$$q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 6x_2x_3$$

où $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$.

1. Écrire la forme polaire Q de q.
2. Déterminer la matrice de q sur la base canonique.
3. Déterminer les sous-espaces vectoriels $H = e_1^\perp$, $K = e_2^\perp$ et $L = e_3^\perp$.
   Quelle particularité présente L ?
4. Appliquer l'algorithme de Gauss à la forme q.
5. Utiliser l'un des résultats précédents pour obtenir une base orthogonale pour q.

Exercice 15. On considère la forme quadratique sur $E = \mathbb{C}^3$:

$$q(x) = 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + ax_1x_3$$

où $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}$ et a un nombre complexe fixé.

1. (a) Donner une décomposition de q en somme de carrées de formes linéaires indépendantes.
   (b) Quel est le rang de q.
2. On suppose que $a = 4$.
   (a) Déterminer la matrice A de la forme polaire Q de q dans la base canonique de E.
   (b) Utiliser la question 1.(a) pour trouver une base de E orthogonale pour Q.
   (c) Déterminer une matrice P carrée inversible de dimension 3 telle que ${}^tP\,A\,P$ soit une matrice diagonale.