Fiche 5.

Exercice 1. Soit E un espace euclidien de norme $\|\cdot\|$. Montrer que, pour tout $x, y \in E$, on a

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Exercice 2. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si et seulement si, pour tout $x \in E$, on a
$$x = \langle x, b_1\rangle\, b_1 + \cdots + \langle x, b_n\rangle\, b_n.$$
2. On suppose que $\|b_i\| = 1$ pour $i = 1, \dots, n$ et que, pour tout $x \in E$, on a
$$\|x\|^2 = \langle x, b_1\rangle^2 + \cdots + \langle x, b_n\rangle^2.$$
Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale, puis que c'est une base orthonormale.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$, un entier. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels distincts. Montrer que l'application $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(P, Q) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$$

est un produit scalaire sur E.

Exercice 4. Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Montrer qu'on a égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Exercice 5. Pour les matrices symétriques M suivantes, déterminer une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(Indication. On pourra vérifier que 3 est racine double du polynôme caractéristique de la deuxième matrice.)

Exercice 6.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $A^n = 0$. Déterminer A.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle qu'il existe un entier $p \geq 1$ avec $M^p = I$. Déterminer M^2.

Exercice 7. Soient A et B deux matrices symétriques dans $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^{2p+1} = B^{2p+1}$ pour un entier $p \geq 1$. Le but de cet exercice est de montrer que $A = B$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \subset \mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1} I).$$
2. En utilisant le fait que $\lambda^{2p+1} \neq \mu^{2p+1}$ si λ et μ sont deux réels distincts et que A est diagonalisable, en déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1} I).$$
3. En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \mathrm{Ker}(B - \lambda I),$$
puis que $A = B$.

Exercice 8. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice. On suppose que les valeurs propres de ${}^tAA - A{}^tA$ sont toutes positives ou nulles. Montrer que A et ${}^tA$ commutent.

Exercice 9. Soit sur $\mathbb{R}^3$ la forme bilinéaire définie par
$$\Phi(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3.$$

1. Montrer que c'est une forme bilinéaire non dégénérée.
2. On se donne un endomorphisme A de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice sur la base canonique est la matrice (du même nom)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Montrer qu'il existe une unique application linéaire $A^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall y \in \mathbb{R}^3 : \Phi(A(x), y) = \Phi(x, A^*(y))$.
Quelle est la matrice de A^* dans la base canonique ?
3. Montrer plus généralement que pour tout endomorphisme B de $\mathbb{R}^3$, il existe une unique application linéaire B^* telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall y \in \mathbb{R}^3 : \Phi(B(x), y) = \Phi(x, B^*(y))$.
4. Donner une formule pour la matrice de B^* dans la base canonique en fonction de celle de B et de celle de la forme bilinéaire.