Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024
L2 - Double Licence Mathématiques et Économie
UE Analyse pour l'économie 1

Feuille d'exercices n° 1 : Intégrales impropres et séries numériques (TD1-TD3)

INTÉGRALES IMPROPRES

Exercice 1. Pour chacune des intégrales suivantes, déterminer si elle converge sans la calculer. Ensuite, si elle converge, calculer sa valeur :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4t}\,dt$ 2) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln(t)\,dt$ 3) $\displaystyle\int_0^{2} \ln(t)\,dt$ 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\,dt.$

Exercice 2. Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ? **Ne pas chercher à en calculer la valeur !**

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^5}{\sqrt{t}(t^4+1)}\,dt$ 3*) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,dt$

4) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(1-\cos\left(\tfrac{1}{t}\right)\right)\,dt$ 5) $\displaystyle\int_0^{1} \sin\left(\tfrac{1}{t}\right)\,dt$ 6*) $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\tfrac{1}{t}\right)\right)\,dt.$

Exercice 3. Discuter en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ la convergence des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^a}\,dt$ 2*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^a}\,dt.$

Exercice 4. (Intégrales de Bertrand). Discuter en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ la convergence de

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a(\ln t)^b}\,dt.$$

Indication : si $a < 1$, minorer par une intégrale de Riemann ; si $a = 1$, trouver explicitement une primitive ; si $a > 1$, majorer par une intégrale de Riemann.

Exercice 5. C'est un exercice classique qui permet de bien voir l'utilité des intégrales impropres.
1) Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}$ converge et en déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}$ converge improprement.
2) Soit $\beta > 1$. En utilisant un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(s^\beta)ds$ converge improprement.
3) Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 1$. Étudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha}}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(s^\beta)ds$.
4*) En linéarisant $\sin^2(t)$, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}dt$ diverge. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\ t}{t}$ ne converge pas absolument.
5*) Vérifier que lorsque $t \to +\infty$,

$$f(t) := \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t} \sim g(t) := \frac{\sin t}{\sqrt{t}},$$

et cependant $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$ ne sont pas de même nature.

SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 6. Déterminer la nature de chacune des séries suivantes en regardant les sommes finies ; si convergence, calculer la valeur de la somme infinie :

$$1)\ \sum_{n\geq 0}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad 2)\ \sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{3^{n-2}} \quad 3)\ \sum_{n\geq 0}\frac{9}{(3n+1)(3n+4)} \quad 4)\ \sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 7. Déterminer la nature des séries suivantes en essayant d'abord d'utiliser le critère de D'Alembert.

$$1)\ \sum n2^{-n} \quad 2)\ \sum\frac{1}{n!} \quad 3)\ \sum\frac{(-1)^n}{n!} \quad 4)\ \sum\frac{e^{in}}{5^n\ln(n)} \quad 5)\ \sum\frac{3^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n-1)!} \quad 6^*)\ \sum\frac{4^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n-1)!}.$$

Exercice 8. Déterminer la nature des séries suivantes en essayant d'abord d'utiliser le critère de Cauchy.

$$1)\ \sum(\sin(1/n))^n \quad 2)\ \sum(1-1/n)^{n^2} \quad 3)\ \sum(1-1/n)^n.$$

Exercice 9. Déterminer la nature des séries suivantes en utilisant un équivalent simple du terme général.

$$1)\ \sum\frac{2+e^{-n}}{\sqrt{n}} \quad 2)\ \sum\frac{n^2+1}{n^3+6} \quad 3)\ \sum(-1)^n\frac{2^n+3^n}{5^n+n^2+\ln(n)} \quad 4)\ \sum\ln(1+e^{-n}) \quad 5)\ \sum(ne^{1/n}-n).$$

Exercice 10. Déterminer la nature des séries suivantes en comparant le terme général à une expression plus simple.

$$1)\ \sum\frac{1}{n3^n} \quad 2)\ \sum\frac{\ln(n)}{n^{43/42}} \quad 3)\ \sum\frac{1}{n\cos^2(n)}.$$

Exercice 11. Déterminer la nature des séries suivantes en essayant d'abord d'utiliser le critère des séries alternées.

$$1)\ \sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad 2)\ \sum(-1)^n(ne^{1/n}-n) \quad 3)\ \sum(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

Exercice 12. Déterminer la nature des séries suivantes.

$$1)\ \sum\frac{1}{\ln(n^2+2)} \quad 2)\ \sum(-1)^n\frac{n^3}{n!} \quad 3)\ \sum(1+(-1))^n \quad 4)\ \sum(\cos(1/n)-1)$$

$$5^*)\ \sum\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \quad 6)\ \sum\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} \quad 7)\ \sum n^{-1-1/\sqrt{n}}.$$

Exercice 13. Obtenir un équivalent simple pour chacune des deux expressions suivantes quand $n\to+\infty$, en utilisant la comparaison série-intégrale :

$$1)\ H_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \quad 2)\ R_n=\sum_{k\geq n}\frac{1}{k^5}.$$