Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024

L2 - Double Licence Mathématiques et Économie

UE Analyse pour l'économie 1

Feuille d'exercices n° 2 : Suites de fonctions. (TD4-TD5)

Exercice 1. Pour chacune des suites de fonctions suivantes, calculer la limite simple et étudier la convergence uniforme sur son ensemble de définition.

1) $f_n :\ ]0,1] \to \mathbb{R};\ f_n(x) = \frac{1}{nx}$

2) $f_n :\ [1,2] \to \mathbb{R};\ f_n(x) = \frac{1}{nx}$

3) $f_n :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f_n(x) = \frac{1}{n^2x^2+1}$

4) $f_n :\ [1,+\infty[\to \mathbb{R};\ f_n(x) = \frac{1}{n^2x^2+1}$

5) $f_n :\ [0,+\infty[\to \mathbb{R};\ f_n(x) = e^{-nx}$

6) $f_n :\ [1,+\infty[\to \mathbb{R};\ f_n(x) = e^{-nx}$

7) $f_n :\ [1,2] \to \mathbb{R};\ f_n(x) = e^{-nx}$.

Exercice 2. On étudie les suites de fonctions réelles définies respectivement pour $n \geq 1$ et pour $x \in [0,+\infty[$ par :

$$f_n :\ x \mapsto \frac{x}{x+n}; \qquad g_n :\ x \mapsto \frac{nx}{1+nx}.$$

1. $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent-elles simplement sur $\mathbb{R}_+$?
2. $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent-elles uniformément sur $[0,1];\ ]0,1];\ [1,+\infty[$?
3. Pour $a \in]0,1[$, $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent-elles uniformément sur $[a,1]$?

Exercice 3. * On étudie la suite de fonctions réelles définie pour $n \geq 0$ et pour $x \in [0,1]$ par :

$$f_n :\ x \mapsto \sin(nx^2)\exp(-nx^2).$$

1. Montrer la convergence simple de $(f_n)_n$.
2. Montrer que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
3. Pour $a \in]0,1[$, montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,1]$.

Exercice 4. * On considère la suite de fonctions de $[0,1[$ vers $\mathbb{R}$ définie pour $n \geq 0$ par :

$$f_n(x) = \min\left(n,\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$

1. Montrer la convergence simple de $(f_n)_n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer (si elle existe) la limite de $f_n(x)$ quand $x \to 1^-$.
3. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0,1[$.

Exercice 5. On étudie la suite de fonctions réelles définie pour $n \geq 0$ et pour $x \in [0, 1]$ par :

$$f_n : x \mapsto \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}.$$

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n).
2. Montrer que
$$I_n := \int_0^1 f_n(t)dt$$
a une limite quand $n \to +\infty$. Déduire de la valeur de cette limite que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.
3. Donner une solution plus élémentaire de la non-convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$, sans utiliser d'intégrales.

Exercice 6. * On considère la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie pour $n \geq 1$ par :

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n).
2. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a convergence uniforme sur $[a, b]$.
3. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on n'a pas convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.
4. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de :
$$I_n := \int_0^1 f_n(t)\ dt.$$

Exercice 7. * On considère la suite de fonctions de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ définie pour $n \geq 2$ par :

$$f_n(x) = \max(-n^3x^2 + 2n^2x,\ 0).$$

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n).
2. Etudier le comportement quand $n \to +\infty$ de :
$$I_n := \int_0^1 f_n(t)\ dt.$$
3. En déduire que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 8. On considère la suite de fonctions de $[-1, 1]$ vers $\mathbb{R}$ définie pour $n \geq 1$ par :

$$g_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}.$$

1. Montrer que cette suite converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle.
2. Qu'en est-il de la convergence uniforme sur $[-1, 1]$ de la suite des dérivées $(g_n')_n$?
3. On considère la suite de fonctions de $[-1, 1]$ vers $\mathbb{R}$ définie pour $n \geq 1$ par :
$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2x^2)}{2n^2}.$$
Montrer que cette suite converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 9. On considère la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie pour $n \geq 1$ par :

$$f_n(x) = \sqrt{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n).
2. Etudier les convergences simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite des dérivées $(f_n')_n$.
3. En déduire que sur tout intervalle borné, (f_n) converge uniformément. Qu'en est-il sur $\mathbb{R}$ tout entier ?