Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024

UE d'analyse pour économie L2

Feuille d'exercices n° 3: Séries de fonctions et séries entières. (TD6-TD8)

Séries de fonctions

Exercice 1. Pour les séries suivantes, dont on appellera systématiquement le terme général $f_n(x)$, déterminer (dans l'ordre qui vous arrange) s'il y a convergence simple/uniforme/normale.

$$1)\ \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^2}\ ,\ x\in[-1,1]\ (x\in[-2,2])\quad 2)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2x}\ ,\ x\in[1,2]\ (x\in]0,+\infty[).$$

$$3)\ \sum_{n\geq 0}e^{-nx^2}\ ,\ x\in[1,+\infty[\ (x\in[0,+\infty[)\ (x\in]0,+\infty[).$$

$$4)\ \sum_{n\geq 0}2^{-n/x}\ ,\ x\in]0,a],\ a>0\ (x\in]0,+\infty[).$$

$$5)\ \sum_{n\geq 0}n^2x^n\ ,\ x\in[0,a],0<a<1\ (x\in[0,1])\ (x\in[0,1[).$$

$$6)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^ne^{-nx}}{n+1}\ ,\ x\in[a,+\infty),\ a>0\ (x\in[0,+\infty[).$$

Exercice 2. Pour x réels positifs tels que la série converge, on pose

$$f(x):=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer l'existence de
$$\int_0^1 f(t)\ dt,$$
puis calculer sa valeur.

Exercice 3. Pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\geq 1$, on pose $f_n(x)=\sin(nx)/n^3$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
Dans la suite de l'exercice, on notera f sa somme.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que :
$$\int_0^\pi f(t)\ dt=2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^4}.$$
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Exercice 4. * Pour $x\geq 0$ tels que la série converge, on pose

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{x+n}.$$

Montrer que cette fonction est définie et de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

Séries entières
On appellera systématiquement le terme général des séries entières $a_n z^n$.

Exercice 5. Pour chacune des séries entières de terme général ci-dessous, déterminer le rayon de convergence **sans calculer explicitement la somme**

$$1)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n \quad 2)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n \quad 3)\ \sum_{n\geq 0} n! z^n \quad 4)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n$$

$$5)\ \sum_{n\geq 0} 8^n z^{3n+2} \quad 6)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n!}{1\cdot 3 \ldots (2n+1)} z^{2n} \quad 7)\ \sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n z^n.$$

Exercice 6. Pour chacune des séries entières ci-dessous, déterminer le rayon de convergence R, **puis calculer la somme sur** $]-R, R[$.

$$1)\ \sum_{n\geq 0} n x^n \quad 2)\ \sum_{n\geq 0} n^2 x^n \quad 3)^*\ \sum_{n\geq 1} \frac{n x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Exercice 7. Développer les fonctions suivantes en série entière autour de 0 :

$$1)\ f_1(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad 2)\ f_2(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \quad 3)\ f_3(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$$

Exercice 8. On suppose que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ a un rayon de convergence non nul et que sur son intervalle de convergence, sa somme $y(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$a)\ y'(t) = -y(t) \quad b)\ y'(t) = y(t) \qquad c)\ y''(t) = -y(t) \qquad d)\ y''(t) = y(t)$$

$$e)\ t^2 y''(t) + 4t y'(t) + (2-t^2) y(t) - 1 = 0.$$

Déterminer tous les coefficients a_n et en déduire une expression simple de $y(t)$, valable en tout point non nul de l'intervale de convergence.

Exercice 9. * Même exercice que le précédent avec l'équation différentielle

$$4ty'' + 2y' + y = 0.$$

Attention : ici, on déterminera les coefficients en fonction de a_0.