Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024

UE d'analyse pour économie L2

Feuille d'exercices n° 4: Norme euclidienne et autres normes sur $\mathbb{R}^n$;
Compacts, bornitude, continuité. (TD9-TD10)

Normes dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, considérons les normes :

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Pour chacune, dessiner la boule unité $B(0,1)$ en dimension 2. Montrer que les 3 normes sont équivalentes.

Exercice 2. Démontrer que, pour n'importe quelle norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\forall x, y, \ \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|.$$

En déduire que si $x_n \to x$, alors $\|x_n\| \to \|x\|$.

Exercice 3. Pour n'importe quelle norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$, on définit la **distance** $d(x, y)$ par :

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Maintenant on peut définir le **diamètre** d'une partie non vide $A \subset \mathbb{R}^n$ par :

$$Diam(A) := \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Que peut-on dire du diamètre d'une boule $B(z, r)$?

Exercice 4. * On dit qu'une partie non vide $A \subset \mathbb{R}^n$ est **convexe** si :

$$\forall x, y \in A, t \in [0, 1], \ (1 - t)x + ty \in A.$$

Démontrer que, pour n'importe quelle norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$, les boules sont convexes.

Exercice 5. Démontrer que, pour n'importe quelle norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ et pour n'importe lesquels $x \neq y$, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(x, r)$ et $B(y, r)$ sont disjointes. En déduire que le singleton $\{z\}$ est toujours un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6. Montrer que dans $\mathbb{R}^n$, une union infinie de fermés (resp., ouverts) n'est pas toujours un fermé (resp., ouvert).

Exercice 7. Calculer l'intérieur et l'adhérence des parties suivantes de $\mathbb{R}$ (qu'on notera A) :

$$[0,\ 1[; \quad]1,\ +\infty[; \quad \mathbb{Z}; \quad \mathbb{Q}.$$

Compacts, bornitude, continuité

Exercice 8. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$. On rappelle que l'ensemble

$$(x, y) \in D : \; f(x, y) = k$$

est la **ligne de niveau** k de la fonction f dans D.

1. Trouver l'ensemble de définition D, puis les lignes de niveau pour $k = -1, 0, 2$ de la fonction donnée par $f(x, y) = x^2 + y^2$.
2. Même question avec $f(x, y) = y/x$.
3. Même question avec $f(x, y) = x - y - |x - y|$.

Exercice 9. En utilisant les propriétés des fonctions continues, vérifier si les ensembles suivants sont ouverts, s'ils sont fermés, et déterminer leur intérieur et leur adhérence.

$$a)\ A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 < |x| < |y| < 1\right\}; \quad b)\ B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x-1)^2 + y^2 < 1, \; (x - 1/2)^2 + y^2 \geq 1/16\right\}$$

$$c)\ C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = x^2\right\}; \quad d)\ D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z > 2\right\}.$$

Exercice 10. Déterminer si les ensembles suivants sont compacts :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 < |x| < |y| < 1\right\}$$

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; (x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x^2 + y^2 + z^2 - 4) \leq 0\right\}$$

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \neq 0, \; xy \leq 1\right\}$$

Exercice 11. Montrer que les fonctions

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}; \quad g(x, y) = \sin\left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2}\right)$$

sont continues en dehors de $(0, 0)$ et se prolongent par continuité en ce point.

Exercice 12. Déterminer l'ensemble de définition de fonctions suivantes. Peut-on les prolonger par continuité en dehors de cet ensemble ?

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x}; \; f_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}; \; f_3(x, y) = \frac{1 - \cos(xy)}{y^2}; \; f_4(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)}; \; f_5(x, y) = \frac{xy^3}{(x^4 + y^4)}.$$