Intégrales généralisées

(= intégrales impropres)

Exemple :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) - (-1)$$

$$= 0 + 1 = 1$$

<u>Déf</u> : Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. (Donc, l'intégrale de f existe sur $[a,c]$ avec $a<c<b$.)

Si $\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx = \ell$ existe, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ converge et vaut ℓ.

De manière analogue : $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ continue

Si $\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx = \ell$ existe, $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

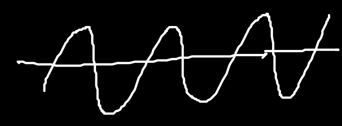
$f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

↪ converge si les deux intégrales à droite convergent

Exemples : $\int_0^\infty \cos x \, dx$,

$$\int_0^c \cos x \, dx = [\sin x]_{x=0}^{c} = \sin c$$



$$\int_0^\infty \cos x \, dx = \lim_{c \to \infty} \sin c \quad \text{n'existe pas !}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} \, dx = \lim_{c \to 1^-} \int_0^c \frac{1}{1-x} \, dx$$

$\boxed{f : [0,1[\to \mathbb{R}}$

$$= \lim_{c \to 1^-} \left[-\ln(1-x) \right]_0^c$$

$$= \lim_{c \to 1^-} \Big(\underbrace{-\ln(1-c)}_{\to -\infty} + \underbrace{\ln(1)}_{0} \Big)$$

$$= +\infty \quad \text{ne converge pas}$$

Convergence absolue :

$f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue

On dit que l'intégrale converge de manière absolue si $\int_a^b |f(x)| \, dx$ converge.

Propriétés : ① Soient $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Si $\int_a^b f(t) \, dt$ et $\int_a^b g(t) \, dt$ convergent, alors

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$$

Preuve : Si F, G sont les primitives de f, g,

on a $\lim\limits_{\substack{c \to b^- \\ (\text{ou } c \to a^+)}} (\lambda F(c) + \mu G(c)) = \lambda \lim\limits_{c \to b^-} F(c) + \mu \lim\limits_{c \to b^-} G(c)$

($\int$ et lim respectent les combinaisons linéaires)

---

② Positivité : $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, continue, positive

alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ si l'existe.

Preuve : vrai pour $\int_a^c$, donc vrai pour la lim.

---

③ Changement de variable

I intervalle réel, $f : I \to \mathbb{R}$ continue

$\varphi : [a,b] \to I$ $\mathcal{C}^1$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

Preuve : $\lim\limits_{c \to b^-} F(\varphi(c))$ à gauche et à droite qui doit converger.

---

④ Intégration par parties : $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$, continue, g $\mathcal{C}^1$

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = [F(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx$$

F la primitive de f

__Preuve :__ vrai sur $[a,c]$

$$\int_a^c f(x)g(x)\,dx = [F(x)\,g(x)]_a^c - \int_a^c F(x)g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\lim_{c\to b^-}} \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

__c.à.d :__

- $[u(x)]_a^b := \lim_{c\to b^-}(u(c)-u(a))$
- Si les deux expressions à droite converge, alors, l'intégrale à gauche converge et l'équation est vraie.

Exemple :

$$\int_0^\infty \underset{g(x)}{x}\,\underset{f(x)}{e^{-x}}\,dx = \left[\underset{F(x)}{\frac{e^{-x}}{-1}}\cdot \underset{g(x)}{x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \underset{F(x)}{(-e^{-x})}\cdot \underset{g'(x)}{1}\,dx$$

$$= \left[-xe^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{x\to\infty}(-xe^{-x}) + 0 + \left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^\infty$$

$$= \underset{\text{croissance comparée}}{0} - \overbrace{\lim_{x\to\infty} e^{-x}}^{=0} + 1 = 1$$

$$\boxed{\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1}$$

Thme (Intégrales de Riemann)

$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge ssi $\alpha > 1$

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge ssi $\alpha < 1$

Preuve : TD

Majorant convergent

Si $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}^+$ continues et $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in]a,b[$

ET $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ converge aussi.

Preuve : $0 \leq \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}$ $\leq \int_a^c g(x)\,dx$, $a < c < b$

croissante comme fct. de c

et majorée par $\int_a^b g(x)\,dx$

donc converge. $\square$

Analogue :

Minorant divergent

Si $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}^+$ continue et $f \geq g$ et $\int_a^b g$ ne converge pas,

$\int_a^b f(t)\,dt$ ne converge pas non plus.

Équivalents

Si $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ continue

et $f \sim g$ en b (c.à.d $\lim_{t \to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$)

Alors $\int f$ converge ssi $\int g$ converge

Preuve : $\exists c :\ \frac{1}{2} f(t) \le g(t) \le 2f(t)$ pour $t \in [c, b[$

g est majorée par $2f$ et
f est majorée par $2g$

En utilisant les propriétés de majorants convergents on constate :

$\int f$ converge $\Rightarrow \int 2f$ converge $\Rightarrow \int g$ converge

$\int g$ converge $\Rightarrow \int 2g$ converge $\Rightarrow \int f$ converge

"Les deux intégrales ont la même nature." $\square$

Exemples :
$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\underbrace{e^x-1}_{\to 0}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\underbrace{e^x-1}_{\text{continue}\ \to 0}}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \quad \boxed{\text{ne cv. pas}}\ \text{(Riemann)}$$

développement limité de e^x en 0 : $1+x$

même nature.

$$\int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$$ même nature !

$\boxed{e^x \sim e^x - 1 \text{ en } \infty}$ par croissance comparée

converge !

$= \left[-e^{-x}\right]_1^\infty = e^{-1} = 1/e$

Conclusion : $\int_0^\infty \frac{1}{e^x-1}\,dx$ ne converge pas !

(Il faut que les deux parties convergent pour avoir convergence.)

Les intégrales ont la même nature =
Toutes les deux convergent ou
toutes les deux divergent

(*) On a vu : $\int_0^1 \frac{1}{e^x-1}\,dx$ a la même nature que $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$.

On sait que $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ ne converge pas (TD)

donc $\int_0^1 \frac{1}{e^x-1}\,dx$ ne converge pas non plus

Ce implique que $\int_0^\infty \frac{1}{e^x-1}\,dx$ ne converge pas non plus parce que par définition il faudrait avoir $\int_0^1 \frac{1}{e^x-1}\,dx$ cv. ET $\int_1^\infty \frac{1}{e^x-1}\,dx$ cv.

Séries numériques (Partie 2)

Séries télescopiques

Exemple:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \cdots + \cancel{\frac{1}{M}} - \frac{1}{M+1}\right)$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left(1 - \frac{1}{M+1}\right) = 1$$

Série télescopique est une série $\sum u_n$ qui s'écrit comme $u_n = a_n - a_{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{M} u_n = a_1 - \cancel{a_2} + \cancel{a_2} - \cancel{a_3} + \cancel{a_3} - \cancel{a_4} \cdots + \cancel{a_M} - a_{M+1}$$

$$= a_1 - a_{M+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{M\to\infty} (a_1 - a_{M+1}) = a_1 - \lim_{M\to\infty} a_{M+1}$$

c.à d une série télescopique converge ssi $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ existe.

$\sum n \cdot n!$ $\qquad n \cdot n! = (n+1)! - n! = a_n - a_{n+1}$

$a_n = -n!$. Evidement $\lim\limits_{n\to\infty} (-n!) = -\infty$

donc $\sum n\cdot n!$ ne converge pas
(mais trivial parce que $n\cdot n! \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$)

Critère comparaison série-intégrale

Soit $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}^+$ et décroissante
alors $\sum f(n)$ et $\int_a^\infty f(t)\,dt$

ont la même nature (toutes les deux cv. ou toutes les deux dv.)

et $\int_{n+1}^\infty f(t)\,dt \le \sum_{k=n+1}^\infty f(k) \le \int_n^\infty f(t)\,dt$

Preuve : si $t \in [n,n+1]$: $f(n+1) \le f(t) \le f(n)$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} \underbrace{f(n+1)}_{\text{constante}}\,dt \le \int_n^{n+1} f(t)\,dt \le \int_n^{n+1} \underbrace{f(n)}_{\text{constante}}\,dt$$

$$\boxed{1\cdot f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(t)\,dt \le 1\cdot f(n)}$$

$$\sum_{n=p}^{M} f(n+1) \le \sum_{n=p}^{M} \int_n^{n+1} f(t)\,dt \le \sum_{n=p}^{M} f(n)$$

$$\sum_{n=p+1}^{M+1} f(n) \le \int_p^{M+1} f(t)\,dt \le \sum_{n=p}^{M} f(n)$$

$\downarrow M\to\infty$ $\qquad \downarrow M\to\infty$ $\qquad \downarrow$

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \qquad \int_p^\infty f(t)\,dt \qquad \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$$

Donc : $\sum_{p+1}^{\infty}$ majorée par $\int^\infty$ et $\int^\infty$ par $\sum_p$ (**)

(*) $$\sum_{n=p}^{M} \int_n^{n+1} f(t)\,dt = \int_p^{p+1} f(t)\,dt + \int_{p+1}^{p+2} f(t)\,dt + \dots + \int_M^{M+1} f(t)\,dt$$

$$= \int_p^{M+1} f(t)\,dt$$

$$\left[\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt \right]$$

Chasles

(**) Comme $f \geq 0$, $\sum_{p+1}^{M}$ croissante ds. M

$\int_p^M$ croissante ds M

Mais : SI $\sum$ cv., alors $\int$ croissante et majorée par $\sum$ donc cv. aussi.

SI $\int$ cv., alors $\sum$ croissante et majorée par $\int$ donc cv. aussi

$\square$

Exemple : Séries de Riemann

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, on utilise $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\boxed{\begin{array}{l}\text{positive} \\ \text{décroissante} \\ \alpha > 0\end{array}}$

Par le critère comparaison série-intégrale il suffit d'étudier $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ < cv. si $\alpha > 1$ / dv. si $\alpha \leq 1$

Conclusion : $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{cv si } \alpha > 1 \quad \text{dv. si } \alpha \leq 1}$

(si $\alpha \leq 0$ alors $\frac{1}{n^\alpha} = n^{(-\alpha)} \not\to 0$, donc dv.)

Exemple: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

positive, décroissante

Il suffit d'étudier $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\,dx = ⊛$

changement de variable: $u = \ln x$

$x = 2,\ u = \ln 2$ $\qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x = \infty,\ u = \infty$ $\qquad$ "$du = \frac{1}{x}\,dx$"

$$⊛ \quad \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{u}\,du = [\ln u]_{\ln 2}^{\infty}$$

$$= \underbrace{\lim_{u\to\infty} \ln u}_{\infty} - \overbrace{\ln(\ln 2)}^{\text{constante}}$$

→ ne converge pas

Conclusion: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ne converge pas.

Théorème (sommation des équivalents)
u_n, v_n positif, $u_n \sim v_n$ si $n \to \infty$
Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature

Preuve: À partir d'un certain rang N, on a
$\frac{1}{2} u_n \leq v_n \leq \underline{2u_n}$

ds M

$\Rightarrow$ Si $\sum u_n$ cv., alors $\sum^{M} v_n$ croissante et majorée par $2\sum^{\infty} u_n$
donc $\sum v_n$ cv.

De même, $\sum v_n$ cv. alors $\sum u_n$ cv. $\square$

Exemple: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$, $\frac{1+2^n}{1+3^n} > 0$

$1+2^n \sim 2^n$, $n \to \infty$
$1+3^n \sim 3^n$, $n \to \infty$

$\frac{1+2^n}{1+3^n} \sim \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ cv.

série géométrique avec $q = \frac{2}{3} < 1$

Conclusion: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$ converge

---

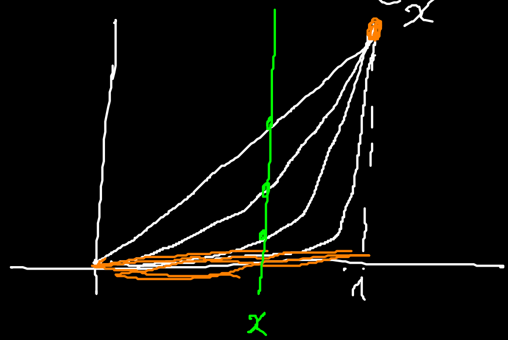
Suites des fonctions

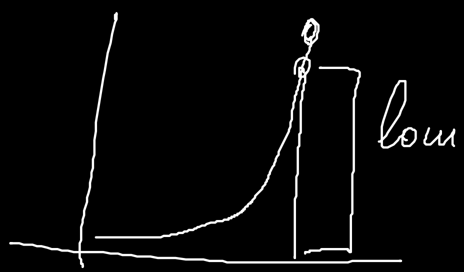
CC2
3 decembre

Exemple: $f_n(x) = x^n$, $f_n : [0,1] \to [0,1]$

Pour chaque x fixé, on a une suite numérique

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$





Déf: Soient $f_n : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, B fermé

Si $\lim f_n(x) = f(x)$ existe $\forall x \in A$

on appelle f la limite simple de $(f_n)_n$

On parle de la convergence simple.

(c.à.d. $\forall x : \forall \varepsilon\ \exists N : \forall n \ge N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ | N différent pour chaque x)

Déf Soient $f, f_n : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, B fermé.

f est la limite uniforme de la suite f_n

si $\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n \ge N : \forall x\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

c.à.d. même N pour tout x.

Propriété: ⊙ Si f est la limite uniforme elle est aussi la limite simple.

(On peut utiliser le même N ds la cv. simple)

Critère pour cv. non-uniforme ; f lim. simple de f_n

Si on a $x_n \in A$ tq $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq c > 0$ alors f_n ne converge pas uniformément.

Preuve : Pour chaque N, on a $|f_N(x_N) - f(x_N)| \geq c$ donc cela n'est jamais $< \varepsilon = \frac{c}{2}$ pour tout x

Exemple : $f_n(x) = x^n$, $\lim f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

$\boxed{x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}}$; $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$

$f(x_n) = 0$

$$\Rightarrow |f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2}$$

Critère avec $c = \frac{1}{2}$

Conclusion pas de cv. uniforme.

Alternative : $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{e}$$

À partir d'un certain rang : $f_n(x_n) \geq \frac{1}{2e}$

$c = \frac{1}{2e}$ marche

Théorème : Si $f_n : A \to B$ continue, $A, B \subset \mathbb{R}$

et $f(x) = \lim f_n(x)$ existe

ET la convergence est uniforme, alors f est continue

<u>Corollaire</u> : Si f_n continue et $\lim f_n = f$ n'est pas continue, la cv. n'est pas uniforme.

Exemple : $x^n \to \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}$

f n'est pas continue, x^n est continue (polyn.)

$\Rightarrow$ cv. n'est pas uniforme

<u>Critère uniformité</u>

On a $f_n : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, B fermé et $\lim f_n = f$ limite simple

S'il existe u_n suite numérique tq

$$|f_n(x) - f(x)| \le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pas de } x\,!!}}{u_n} \longrightarrow 0,$$

alors la cv. est uniforme

$f_n :]0,1[\to]0,1[$, $f_n(x) = x^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow \boxed{f(x) = 0}$ pour $0 < x < 1$

$\hookrightarrow 0 \notin B =]0,1[$

Si on prend B fermé f prend toujours des valeurs ds. B.

→ Réponse à : Pourquoi demander B fermé ?

Ex: $f_n : [0,1] \to [0,1]$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$, donc la limite simple existe et $f(x) = 0$ pour $x \in [0,1]$

$\boxed{\text{cv. uniforme}}$ parce que $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{x}{n} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{pas de } x} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Ex: $f_n : [0,\infty[\to [0,\infty[$

$f_n(x) = \frac{x}{n}$, $f(x) = 0$ est la limite simple

x fixé $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000\ldots0}{n} = 0$

$\boxed{x_n = n}$

$f_n(x_n) = 1$

$|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1 = c$ → $\boxed{\text{pas de cv. uniforme}}$