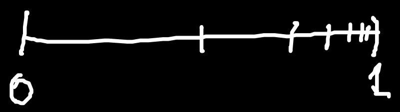
Analyse pour l'économie 1

Theresia Eisenkölbl

Séries numériques

Exemple : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$



Série géométrique :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{1-q} \quad \text{si } |q|<1$$

$$q^{N+1} \nearrow 0$$

Définition : Une série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est la limite de sommes partielles $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$.

Elle converge vers s si $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = s$

Sinon, elle est divergente

Thme : Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \to 0$.

Preuve : $u_n = s_n - s_{n-1}$ et on sait $\displaystyle s_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \to s$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Premier critère : Si $u_n \not\to 0$, $\sum u_n$ diverge.

Exemple : $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$ $\quad 3^n \not\to 0 \to$ série diverge

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0 \to$ série diverge

---

Corollaire : La série géométrique $\sum q^n$ diverge si $|q| \geq 1$

Exemple : La série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Preuve :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}-1} \right)$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{2^k}_{\text{nbre de termes}} \times \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \text{ diverge } \searrow \infty$$

$\square$

Thme (Critère de majorant convergent / minorant dv.)

a) Si $u_n > 0$ et $u_n \leq b_n$ avec $\sum b_n$ cv. alors $\sum u_n$ cv. aussi

b) Si $0 \leq a_n \leq u_n$ et $\sum a_n$ dv. alors $\sum u_n$ dv.

Preuve : a) $\underbrace{\sum_{n=0}^{N} u_n}_{s_N} \leq \sum_{n=0}^{N} b_n$,

s_N est suite croissante et majorée par $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ $\Rightarrow s_N$ cv.

b) Supposons que $\sum u_n$ cv., alors $\sum a_n$ cv. aussi par a).
Contradiction! $\square$

Propriétés de bases

⊙ Si $\sum u_n = u$ et $\sum v_n = v$ et $c \in \mathbb{C}$, alors
$\sum (u_n + v_n) = u + v$ et $\sum c \cdot u_n = c \cdot u$.

Consequence immédiate de $\lim (s_n + t_n) = \lim s_n + \lim t_n$ si $(s_n), (t_n)$ cv., etc.

Déf: Une série $\sum u_n$ converge absolument, si $\sum |u_n|$ cv.

Exemple: $\sum \frac{(-1)^n}{2^n}$ cv. abs.

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ne cv. pas abs. (mais cv!)

Thme: Si $\sum |u_n|$ cv, alors $\sum u_n$ cv.

Preuve: $s_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$, $\bar{s}_N = \sum_{n=0}^{N} |u_n|$

$|s_N - s_M| = |u_{M+1} + \dots + u_N| \le |u_{M+1}| + \dots + |u_N| = |\bar{s}_N - \bar{s}_M|$

Critère de Cauchy pour les suites:
$\bar{s}_N$ cv. on a $|\bar{s}_N - \bar{s}_M| \xrightarrow{N,M \to \infty} 0 \Rightarrow |s_N - s_M| \to 0$
$\Rightarrow s_N$ cv. $\square$

Corollaire: Si $|u_n| \le b_n$ et $\sum b_n$ cv, alors $\sum u_n$ cv. (abs)

Thme: On peut réordonner les termes d'une série si on a convergence absolue.

Preuve : site web.

Corollaire : Si $\sum u_n = u$ et $\sum v_n = v$ avec cv. abs

alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection

Si $\sum u_n = u$ cv. abs. alors $\sum u_{\sigma(n)} = u$.

Critère d'Alembert (quotient)

Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell$ et $\begin{cases} \ell < 1, & \text{alors } \sum u_n \text{ cv. (abs)} \\ \ell > 1, & \text{alors } \sum u_n \text{ dv.} \end{cases}$

Preuve : Si $\ell > 1$, alors $u_n \not\to 0 \Rightarrow \sum u_n$ dv.

Si $\ell < 1$: $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq q < 1$ pour $n \geq n_0$

$$\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |u_{n_0}| \cdot q^{n-n_0} \quad \text{cv.} \quad (|q|<1)$$

(et $\sum_{n=0}^{n_0-1} |u_n|$ somme finie, donc constante)

Comme la série géom. est un majorant convergent $\sum |u_n|$ cv. $\square$

Critère d'Alembert : Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell < 1$, $\sum u_n$ cv.

Exemple : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$, $\quad u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2 \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{3^{n+1}} \cdot n^2} = \frac{(n^2+2n+1)}{3n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} < 1$$

Par le critère d'Alembert, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ cv.

Critère de Cauchy (racine)

Si $\sqrt[n]{|u_n|} \xrightarrow{n\to\infty} \ell$ et $\begin{cases} \ell < 1 & \text{alors } \sum u_n \text{ cv. (abs)} \\ \ell > 1 & \text{alors } \sum u_n \text{ dv.} \end{cases}$

Preuve : Si $\ell > 1$, $u_n \not\to 0 \Rightarrow \sum u_n$ dv.

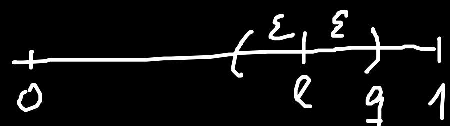
Si $\ell < 1$, $\sqrt[n]{|u_n|} \leq q < 1$, pour $n \geq n_0 \rightarrow \circledast$

Rappel : Si $a_n \to a$, alors :

$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

a_n ici pour $n \geq n_0$

$a_n = \sqrt[n]{|u_n|} \to \ell < 1$



$q = \dfrac{\ell + 1}{2}$, alors $q < 1$

on peut prendre $\varepsilon = q - \ell = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$

Il existe donc n_0 tq $a_n \in \,]\ell - \varepsilon, \underbrace{\ell + \varepsilon}_{=q}[$, $n \geq n_0$

$\Rightarrow \quad a_n \leq q \quad$ si $\quad n \geq n_0$

$\circledast \quad |u_n| \leq q^n \quad$ si $\quad n \geq n_0$.

$\Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n \quad$ cv $\quad (|q| < 1) \qquad \square$

Critère de Cauchy : $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} \ell \quad \begin{cases} \ell > 1 & \text{dv.} \\ \ell < 1 & \text{cv (abs)} \end{cases}$

Exemple : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{1}{3} \cdot (\sqrt[n]{n})^2 \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{3} \cdot 1^2 = \frac{1}{3} < 1$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ cv. (abs)

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}} = \boxed{\lim_{n \to \infty} \exp}\left(\ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right)\right)$$

$$= \boxed{\exp\left(\lim_{n \to \infty}\right.} \left(\frac{1}{n} \ln n\right)\Big) = \exp(0) = 1$$

On sait que n a une croissance plus importante que le logarithme.

Donc, par croissance comparée : $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

Exemple : $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^3 + 1}$?

$$\sqrt[n]{n^3} < \sqrt[n]{n^3 + 1} < \sqrt[n]{n^4} \quad (n \geq 2)$$

$$\sqrt[n]{n^3} \xrightarrow{n \to \infty} 1^3 = 1, \qquad \sqrt[n]{n^4} \to 1^4 = 1, \qquad \sqrt[n]{n^3+1} \to 1$$

(thme de gendarmes)

En fait $\sqrt[n]{|p(n)|} \xrightarrow{n \to \infty} 1$, p polynôme.

Critère de Leibniz (séries alternantes)

Si $u_n \geq 0$, u_n décroissante et $\lim u_n = 0$

alors $\sum (-1)^n u_n$ cv.

Preuve :

$S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n u_n$ $\quad\Big|\quad$ $S_{2N} = S_{2N-2} \underbrace{- u_{2N-1} + u_{2N}}_{\leq 0}$ $\quad\Big|\quad$ $u_{2N} \leq u_{2N-1}$ (décroissante)

$\Rightarrow \quad S_{2N} \leq S_{2N-2}$

$$S_{2N+1} = S_{2N-1} + u_{2N} - u_{2N+1} \geq S_{2N-1}$$

$$S_{2N+1} = S_{2N} - u_{2N+1} \leq S_{2N}$$

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \dots \leq S_{2N+1} \leq S_{2N} \leq \dots \leq S_4 \leq S_2 \leq S_0$$

$\Rightarrow$ $(S_{2n+1})_n$ est croissante et majorée par S_0

donc converge vers S

(S_{2n}) est décroissante et minorée par S_1

donc converge vers S'

mais $\boxed{S' - S} = \lim S_{2n} - \lim S_{2n+1}$

$= \lim (S_{2n} - S_{2n+1})$

$= \lim u_{2n+1} \boxed{= 0}$

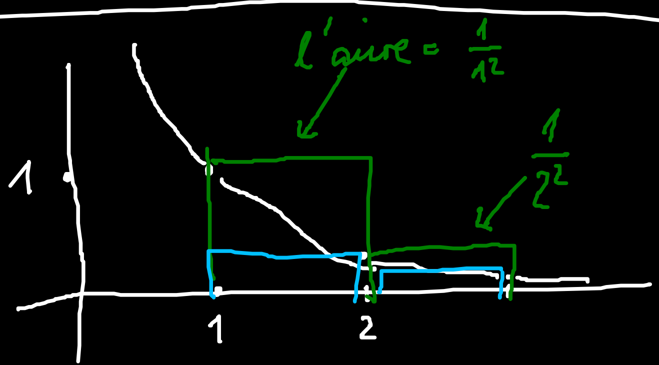
$\Rightarrow \lim S_n = S$. $\square$

Corollaire : $\quad S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}$

Exemple : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ alternantes

$u_n = \frac{1}{n}$ décroissante $\searrow 0$ cv. (pas de cv. abs. série harmonique)

Exemple. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = -0+1 = 1$$

fini !

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = -0+1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \underbrace{1+1}_{2} \quad \Rightarrow \text{CV!}$$

Remarque

(en fait $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

Série harmonique :

$$\underbrace{1}_{\geq 1\times\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{\geq 2\times\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{\geq 4\times\frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}}_{\geq 8\times\frac{1}{16}} + \dots$$

$$\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \quad \text{diverge !}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}, \quad u_n = \frac{1}{2}, \quad S_N = \frac{N+1}{2} \xrightarrow{N\to\infty} \infty$$

diverge

Suite de Cauchy

$(a_n)_n$ cv. ssi

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon}$$

$$|S_N - S_M| \leq |u_{M+1} + \dots + u_N| \leq |u_{M+1}| + \dots + |u_N|$$
$$\leq |\bar{S}_N - \bar{S}_M|$$
$$\bar{S}_N = \sum_{n=0}^{N} |u_n|$$

On suppose $\sum |u_n|$ cv. $\Rightarrow |\bar{S}_N - \bar{S}_M| < \varepsilon$, si $N, M \geq n_0$

$|S_N - S_M| \leq |\bar{S}_N - \bar{S}_M| < \varepsilon$ si $N, M \geq n_0$

$\Rightarrow$ $(S_n)_n$ converge (comme suite)

$\Rightarrow$ $\sum u_n$ cv.