

Analyse pour l'Économie 1

Résultats principaux du Cours Magistral

Licence Matheco 2ème Année – Lyon 1 Université Claude Bernard

Laurent Bétermin*

Table des matières

1	Intégrales impropres	3
1.1	Définitions	3
1.2	Propriétés classiques des intégrales impropres convergentes	4
1.3	Théorèmes pour des fonctions positives	4
1.4	Intégrales absolument convergentes	5
2	Séries numériques	6
2.1	Définitions et premiers exemples	6
2.2	Propriétés classiques	7
2.3	Théorèmes pour des séries à termes positifs	7
2.4	Séries alternées	8
2.5	Séries absolument convergentes	8
2.6	Comparaison séries/intégrales impropres	9
2.7	Produit de deux séries (optionnel)	9
3	Suites et séries de fonctions	10
3.1	Suites de fonctions	10
3.2	Séries de fonctions	11
4	Séries entières	14
4.1	Convergence d'une série entière	14
4.2	Séries entières réelles	15
4.3	Fonctions développables en séries entières réelles	16
4.4	Formulaire	17
5	Topologie de $\mathbb{R}^n$ et continuité des fonctions de plusieurs variables	18
5.1	Normes	18
5.2	Ouverts, fermés	19
5.3	Compacité	20
5.4	Continuité	21
6	Compléments sur l'intégrale de Riemann	22
6.1	Intégration des fonctions en escaliers	22
6.2	Intégration des fonctions réglées	23

*betermin@math.univ-lyon1.fr, Bâtiment Braconnier, Bureau 201.

1 Intégrales impropres

1.1 Définitions

Remarque 1.1. Dans ce chapitre, on supposera connue la signification, pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$, avec $a \leq b$, de $\int_a^b f(t) dt$, par exemple en tant qu'aire sous la courbe (comptée positivement quand f est positive et négativement quand f est négative). Une définition plus précise sera donnée dans le dernier chapitre de ce cours. On notera aussi $\int_I f(t) dt$ l'intégrale de f sur l'intervalle I quand celle-ci a un sens.

Théorème 1.2 (Théorème fondamental de l'analyse, vu en L1). Soit $I \neq \emptyset$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non-réduit à un singleton, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$F_a(x) := \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a , c'est-à-dire vérifiant

$$\forall x \in I, F'_a(x) = f(x) \quad \text{et} \quad F_a(a) = 0.$$

Définition 1.3 (Droite réelle achevée). La droite réelle achevée est définie et notée par $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Définition 1.4 (Point incertain). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dira que $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ est un point incertain de I si $x_0 \notin I$ est une des bornes de I .

Définition 1.5. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$.

1. **Un point incertain sur un intervalle non-borné.** Si f est continue sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si $F_a(x)$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$ et dans ce cas on note cette intégrale dite impropre

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

2. **Un point incertain sur un intervalle borné.** Si f est continue sur $]a, b]$, alors on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si $F_x(b)$ admet une limite finie quand $x \rightarrow a^+$ et dans ce cas on note cette intégrale dite impropre

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt.$$

Même chose si f est continue sur $[a, b[$ avec $\lim_{x \rightarrow b^-} F_a(x)$ finie. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale

$\int_a^b f(t) dt$ diverge.

3. **Deux points incertains sur un intervalle borné ou non-borné.** Si f est continue sur $]a, b[$ avec de plus $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ (les bornes sont éventuellement infinies), on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent et dans ce cas on note cette intégrale dite impropre (en utilisant la relation de Chasles donnée dans la proposition suivante) :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ diverge.

1.2 Propriétés classiques des intégrales impropres convergentes

Proposition 1.6 (Relation de Chasles pour les intégrales impropres convergentes). Soit $(a, a') \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq a'$, et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_{a'}^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature (c'est-à-dire convergentes ou divergentes simultanément). Si elles convergent, alors on a

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{a'} f(t) dt + \int_{a'}^{+\infty} f(t) dt.$$

Le résultat est similaire, avec $b \in \mathbb{R}$ comme borne au lieu de $+\infty$, si les fonctions sont continues sur $]a, b]$ et $a < a' \leq b$.

Proposition 1.7 (Linéarité pour les intégrales impropres convergentes). Soit $a \in \mathbb{R}$, f et g continues sur $[a, +\infty[$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Si les deux intégrales impropres $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent, alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt$ converge et on a

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t) dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

Le résultat est similaire, avec $b \in \mathbb{R}$ comme borne au lieu de $+\infty$, si les fonctions sont continues sur $]a, b]$ et si les intégrales de f et g sur cet intervalle sont convergentes.

Proposition 1.8 (Inégalité/Positivité). Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, +\infty[$ deux fonctions continues. Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent, alors on a

$$f \leq g \implies \int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

En particulier, l'intégrale convergente d'une fonction positive est positive :

$$f \geq 0 \implies \int_a^{+\infty} f(t) dt \geq 0.$$

Le résultat est similaire, avec $b \in \mathbb{R}$ comme borne au lieu de $+\infty$, si les fonctions sont continues sur $]a, b]$ et si les intégrales de f et g sur cet intervalle sont convergentes.

1.3 Théorèmes pour des fonctions positives

Lemme 1.9 (Primitive d'une fonction positive et divergence). Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[$ une fonction continue et positive, alors sa primitive F_a est croissante sur $[a, +\infty[$ et on a

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ diverge} \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} F_a(x) = +\infty.$$

Théorème 1.10 (Comparaison et convergence). Soit $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, +\infty[$. Supposons que

$$\exists A \geq a, \quad \forall t > A, \quad f(t) \leq g(t) \quad ("f \text{ est majorée par } g \text{ au voisinage de } +\infty").$$

1. Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.
2. Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge.

Le résultat est similaire :

a) si $f(t) = O(g(t))$ (et donc si $f(t) = o(g(t))$);

b) si $b \in \mathbb{R}$ est la borne remplaçant $+\infty$, si les fonctions f et g sont continues et positives sur $]a, b]$ et si

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall t \in]a, a + \varepsilon], \quad f(t) \leq g(t) \quad ("f \text{ est majorée par } g \text{ au voisinage de } a").$$

Théorème 1.11 (Equivalents et convergence). Soit $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a, +\infty[$. Supposons que $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$. Alors

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge} \iff \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ converge}.$$

Le résultat est similaire avec $b \in \mathbb{R}$ comme borne au lieu de $+\infty$, si les fonctions sont continues et strictement positives sur $]a, b]$ et si $f(t) \underset{t \rightarrow a^+}{\sim} g(t)$.

Théorème 1.12 (Intégrales de Riemann). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \iff \alpha > 1;$$

$$2. \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \iff \alpha < 1.$$

1.4 Intégrales absolument convergentes

Définition 1.13 (Convergence absolue). Soit f une fonction continue sur un intervalle I . On dit que $\int_I f(t) dt$ est absolument convergente si $\int_I |f(t)| dt$ converge.

Lemme 1.14 (Critère de Cauchy). Soit $F : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \geq a, \quad \forall (u, v) \in [M, +\infty[^2, \quad |F(u) - F(v)| < \varepsilon.$$

Théorème 1.15 (Convergence absolue implique convergence). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $\int_I f(t) dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente et on a de plus $\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt$.

Définition 1.16 (Intégrale semi-convergente). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $\int_I f(t) dt$ est semi-convergente si elle converge mais n'est pas absolument convergente.

2 Séries numériques

2.1 Définitions et premiers exemples

Définition 2.1 (Série, somme, convergence et reste). Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle d'ordre n par

$$S_n = u_0 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle la série de terme général u_k . Par abus de notation, cette série est notée $\sum_{k \geq 0} u_k$.

Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire la série, admet une limite finie, on note

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

la somme de la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ et on dit que la série est convergente. Sinon, on dit que la série est divergente. Dans le cas où la série converge, le reste d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de cette série est défini par

$$R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k,$$

de telle sorte que $S = S_n + R_n$.

Proposition 2.2 (Série géométrique, série arithmétique). On a les deux résultats suivants :

1. Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, alors la série géométrique $\sum_{k \geq 0} q^k$ a ses sommes partielles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

et la série converge si et seulement si $|q| < 1$. La somme de cette série géométrique est alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

2. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, alors la série arithmétique $\sum_{k \geq 0} (ak + b)$ converge si et seulement si $(a, b) = (0, 0)$ (et sa somme est donc nulle) et ses sommes partielles sont données par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (ak + b) = \frac{(n+1)(an + 2b)}{2}.$$

Proposition 2.3 (Série télescopique). On appelle série télescopique toute série de la forme

$$\sum_{k \geq 0} (u_{k+1} - u_k).$$

Ses sommes partielles sont données par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

De plus, cette série converge si et seulement si $\ell := \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k$ est finie et on a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0.$$

2.2 Propriétés classiques

Proposition 2.4 (Reste d'une série convergente). Si une série est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.

Proposition 2.5 (Convergence et terme général). Si la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$. De manière équivalente, si $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \neq 0$, alors la série diverge.

Proposition 2.6 (Convergence et linéarité). Soient $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} v_k$ deux séries convergentes. Alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k)$ converge et on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge si et seulement si $\sum_{k \geq 0} \lambda u_k$ converge.

Proposition 2.7 (Critère de Cauchy). La série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad N \leq n \leq m \implies \left| \sum_{k=n}^m u_k \right| < \varepsilon.$$

2.3 Théorèmes pour des séries à termes positifs

Lemme 2.8 (Série à termes positifs croissante). Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ une suite de termes positifs ou nuls. Alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de terme général u_k est croissante et on a

$$\sum_{k \geq 0} u_k \text{ diverge} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Théorème 2.9. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ une suite de termes positifs. Alors :

$$\sum_{k \geq 0} u_k \text{ converge} \iff \exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n \leq M.$$

Théorème 2.10 (Comparaison de séries positives). Soient $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} v_k$ deux séries à termes positifs ou nuls. Supposons que : $\exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq k_0, \quad u_k \leq v_k$.

1. Si $\sum_{k \geq 0} v_k$ converge, alors $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge et on a $\sum_{k=k_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} v_k$.
2. Si $\sum_{k \geq 0} u_k$ diverge, alors $\sum_{k \geq 0} v_k$ diverge.

Le résultat est similaire si $u_k = O_{k \rightarrow +\infty}(v_k)$ (et donc si $u_k = o_{k \rightarrow +\infty}(v_k)$).

Théorème 2.11 (Convergence et équivalents). Soient $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} v_k$ deux séries à termes strictement positifs.

Si $u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} v_k$, alors :

$$\sum_{k \geq 0} u_k \text{ converge} \iff \sum_{k \geq 0} v_k \text{ converge}.$$

2.4 Séries alternées

Définition 2.12 (Série alternée). On appelle série alternée toute série de la forme

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$$

où $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ est une suite de termes positifs ou nuls, c'est-à-dire une série dont le terme général change de signe à chaque rang.

Théorème 2.13 (Critère spécial des séries alternées de Leibniz). Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

1. **(Positivité)** $\forall k \in \mathbb{N}, u_k \geq 0$,
2. **(Décroissance)** la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante,
3. **(Limite nulle)** et $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$,

alors la série alternée $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ converge.

Corollaire 2.14 (Encadrement de la somme et majoration du reste d'une série alternée). Soit $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ une série alternée, de somme S et de suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vérifiant les hypothèses du Théorème 2.13. Alors :

1. La somme S vérifie les encadrements suivants :

$$0 \leq S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \dots \leq S \leq \dots \leq S_4 \leq S_2 \leq S_0,$$

i.e., la suite des sommes partielles d'ordre impaire (resp. paire) est croissante (resp. décroissante) et minore (resp. majore) S .

2. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq u_{n+1}$.

2.5 Séries absolument convergentes

Définition 2.15 (Convergence absolue). On dit qu'une série $\sum_{k \geq 0} u_k$ est absolument convergente si la série $\sum_{k \geq 0} |u_k|$ converge.

Théorème 2.16 (Convergence absolue implique convergence). Si une série est absolument convergente, alors elle converge et on a de plus $\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$

Théorème 2.17 (Critère de convergence de d'Alembert). Soit $\sum_{k \geq 0} u_k$ une série de termes non-nuls.

1. S'il existe une constante $\alpha \in]0, 1[$ et un entier k_0 tels que, pour tout $k \geq k_0$

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq \alpha < 1,$$

alors la série est absolument convergente. C'est en particulier vrai si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \ell < 1$.

2. S'il existe un entier k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \geq 1,$$

alors la série diverge. C'est en particulier vrai si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \ell > 1$.

3. Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = 1$, on ne peut pas conclure en général.

Théorème 2.18 (Critère de convergence de Cauchy). Soit $\sum_{k \geq 0} u_k$ une série.

1. S'il existe une constante $\alpha \in]0, 1[$ et un entier k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$

$$\sqrt[k]{|u_k|} \leq \alpha < 1,$$

alors la série est absolument convergente. C'est en particulier vrai si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|u_k|} = \ell < 1$.

2. S'il existe un entier k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$

$$\sqrt[k]{|u_k|} \geq 1,$$

alors la série diverge. C'est en particulier vrai si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|u_k|} = \ell > 1$.

3. Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|u_k|} = 1$, on ne peut pas conclure en général.

2.6 Comparaison séries/intégrales impropres

Théorème 2.19 (Comparaison série/intégrale). Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ positive, continue et décroissante. Alors

$$\sum_{k \geq 0} f(k) \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

Proposition 2.20 (Séries de Riemann). Soit $\alpha > 0$ un réel, alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

Proposition 2.21 (Comparaison à une série de Riemann). Soit $\sum_{k \geq 0} u_k$ une série alors

$$\exists \alpha > 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0 \implies \sum_{k \geq 0} u_k \text{ est absolument convergente.}$$

2.7 Produit de deux séries (optionnel)

Définition 2.22 (Produit de Cauchy de deux séries). Soient $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} v_k$ deux séries. On appelle produit de Cauchy la série $\sum_{k \geq 0} c_k$ où

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k = \sum_{i=0}^k u_i v_{k-i}.$$

Théorème 2.23 (Convergence absolue du produit de Cauchy). Soient $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} v_k$ deux séries absolument convergentes, alors la série produit

$$\sum_{k \geq 0} c_k = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{i=0}^k u_i v_{k-i} \right)$$

est absolument convergente et on a de plus

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \right) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} v_i \right).$$

3 Suites et séries de fonctions

3.1 Suites de fonctions

Définition 3.1 (Suite de fonctions). Soit $E \subset \mathbb{C}$. On appelle suite de fonctions toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction.

Définition 3.2 (Convergence simple). On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur $E \subset \mathbb{C}$ si :

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x),$$

c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x) - f(x)) = 0$ ou encore que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in E, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, f est appelée la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 3.3 (Convergence uniforme). On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $E \subset \mathbb{C}$ si :

1. la suite de fonction $(f_n - f)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée à partir d'un certain rang,
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E, \quad \forall n \geq N, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, f est appelée la limite uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 3.4 (CVU implique CVS). Si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur E , alors elle converge simplement vers f sur E .

Théorème 3.5 (Continuité de la limite uniforme). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et $a \in E$. Supposons que :

1. la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur E ,
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a ,

alors f est continue en a . En particulier, la limite uniforme de fonctions continues sur E est continue sur E .

Définition 3.6 (Point adhérent à un ensemble). Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble. On dit que $a \in \mathbb{C}$ est adhérent à E s'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.

Théorème 3.7 (Double limite). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers f sur E et soit a un point adhérent à E (ou bien $a = \pm\infty$). Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \ell_n \in \mathbb{C}$, alors $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, autrement dit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \quad \left(= \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \right).$$

Théorème 3.8 (Limite uniforme d'une suite d'intégrales sur un segment). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et $a < b$ deux réels de E tels que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur le segment $[a, b]$,
2. la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$,

alors la suite $\left(\int_a^b f_n(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est donnée par

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt \quad \left(= \int_a^b f(t) dt \right).$$

En particulier, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment d'un intervalle I et si $x_0 \in I$, alors, en définissant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t) dt \quad \text{et} \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

on a que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur tout segment de I .

Théorème 3.9 (Dérivation et limite uniforme). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^1(I)$,
2. la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I ,
3. la suite des dérivées $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers g .

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I , $f \in C^1(I)$ et $f' = g$.

Corollaire 3.10 (Dérivations successives). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^p(I)$,
2. pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers g_k ,
3. la suite $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers g_p .

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f = g_0$ sur tout segment de I , $f \in C^p(I)$ et, $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $f^{(k)} = g_k$.

3.2 Séries de fonctions

Dans toute la suite, sauf mention du contraire, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$.

Définition 3.11 (Série de fonctions). On appelle série de fonctions de terme général f_n la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n f_k.$$

On note cette série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ et S_n est appelée la somme partielle d'ordre n de cette série.

Définition 3.12 (Convergence simple, uniforme et absolue). On dit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur $A \subset E$ si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément) sur A .

De plus, on dit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge absolument sur A si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|$ converge simplement sur A .

Quand la série converge :

- on appelle fonction somme de la série la fonction S définie sur A par

$$\forall x \in A, \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

- pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle reste d'ordre n de la série la fonction R_n définie sur E par

$$\forall x \in A, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S = S_n + R_n$ sur A et la suite des restes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur A .

Définition 3.13 (Domaine de définition (ou de convergence simple)). On appelle domaine de convergence (simple) de la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ l'ensemble

$$D = \left\{ x \in E : \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \text{ converge simplement} \right\}.$$

Proposition 3.14 (CVS de la série et convergence du terme principal vers la fonction nulle). Si la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $A \subset E$, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur A .

Proposition 3.15 (CVA ou CVU implique CVS). Si une série de fonction converge absolument ou uniformément sur $A \subset E$, alors elle converge simplement sur A .

Proposition 3.16 (Condition nécessaire et suffisante pour la convergence uniforme d'une série). Une série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $A \subset E$ si et seulement si :

- elle converge simplement sur A ,
- et si la suite de ses restes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur A .

Proposition 3.17 (CVU de (f_n) vers 0 quand CVU de la série). Si la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $A \subset E$, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers la fonction nulle.

Proposition 3.18 (Critère de CVU pour les séries alternées). Soit $A \subset E \subset \mathbb{R}$. Supposons que, pour tout $x \in A$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ vérifie le critère spéciale des séries alternées, c'est-à-dire que

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, f_n(x) = (-1)^n a_n(x)$ où $a_n(x) = |f_n(x)| \geq 0$,
2. $\forall x \in A, (a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,
3. $\forall x \in A, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(x) = 0$.

Si, de plus, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur A , alors la série de fonction $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur A .

Définition 3.19 (Convergence normale). On dit que $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $A \subset E$ si :

1. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, f_n$ est bornée sur A ,
2. la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in A} |f_n(x)|$ converge dans $\mathbb{R}$.

Théorème 3.20 (CVN implique CVU et CVA). Si une série converge normalement sur $A \subset E$, alors elle converge uniformément et absolument sur A .

Théorème 3.21 (Interversion limite/série). Soit $A \subset E$ et a un point adhérent à A , ou $a = \pm\infty$. On suppose que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \ell_n \in \mathbb{R}$,
2. la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur A .

Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_n$ converge et on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \quad \left(= \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_n \right).$$

Théorème 3.22 (Continuité et CVU). Soit $A \subset E$. On suppose que

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A ,
2. la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur A (ou sur tout segment de A si $A \subset \mathbb{R}$ est un intervalle).

Alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A .

Théorème 3.23 (Interversion intégrale/série). Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On suppose que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$,
2. la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n(t) dt$ converge et on a

$$\int_a^b \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Théorème 3.24 (Dérivation des séries et CVU). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non-réduit à un point. On suppose que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^1(I)$,
2. il existe $a \in I$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(a)$ converge,
3. la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I et uniformément sur tout segment de I , et $S \in C^1(I)$ avec

$$S' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n.$$

Corollaire 3.25 (Dérivations successives d'une série). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non-réduit à un point et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^p(I)$,
2. pour tout $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^{(k)}$ converge simplement sur I ,
3. la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors $S \in C^p(I)$ et on a

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \quad S^{(k)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)} \quad \text{sur } I,$$

et ces dérivées k -ièmes convergent uniformément sur tout segment de I .

4 Séries entières

4.1 Convergence d'une série entière

Définition 4.1 (Série entière et domaine de convergence). On appelle série entière de coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ où $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto a_n z^n$. On dira qu'il s'agit d'une série entière complexe si $z \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ et réelle si $x = z \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$. On notera cette série

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

et on rappelle que son domaine de convergence est $D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge} \right\}$, et que la somme de cette série entière est la fonction $S : D \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in D, \quad S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Lemme 4.2 (Lemme d'Abel). Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition 4.3 (Rayon de convergence). Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est défini par

$$R = \sup \{ r \geq 0 : (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \} \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Proposition 4.4 (Rayon de convergence (bis)). Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n r^n = 0 \right\}.$$

Proposition 4.5 (Caractérisation du rayon de convergence). Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière et $R \geq 0$, alors R est son rayon de convergence si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

1. si $|z| < R$, alors la série entière converge absolument,
2. si $|z| > R$, alors la série entière diverge grossièrement.

Définition 4.6 (Disque ouvert de convergence). Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors on appelle disque ouvert de convergence l'ensemble (parfois noté $D(0, R)$)

$$B(0, R) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \}.$$

Théorème 4.7 (Convergence normale sur tout disque fermé du disque de convergence). Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement, et donc uniformément, sur tout disque fermé

$$\overline{B}(0, r) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq r \}, \quad \text{avec } r \in]0, R[.$$

Corollaire 4.8 (Continuité d'une série entière). La fonction somme S d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur son disque ouvert de convergence $B(0, R)$.

Théorème 4.9 (Règles de d'Alembert et de Cauchy pour les séries entières). Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière.

1. **Règle de d'Alembert** : si $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, a_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$,
2. **Règle de Cauchy** : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell$,

avec $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence de cette série est $R = \frac{1}{\ell}$ (avec la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$).

Proposition 4.10 (Comparaison des coefficients et rayons de convergence). Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b , alors :

1. si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(b_n)$ ou $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$,
2. si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.

Proposition 4.11. Toutes les séries entières de la forme $\sum_{n \geq 0} n^\alpha a_n z^n$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, ont le même rayon de convergence.

Théorème 4.12 (Somme et produit de deux séries entières). Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

1. La série entière $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$, de rayon de convergence notée R_s , est appelée la série somme de ces deux séries entières et on a

$$R_s \geq \min(R_a, R_b) \quad \text{avec égalité si } R_a \neq R_b.$$

De plus,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < \min(R_a, R_b) \implies \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} b_n z^n.$$

2. (Optionnel) La série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ donnée par le produit de Cauchy de ces deux séries, de rayon de convergence noté R_p , est appelée série produit de ces deux séries entières et on a

$$R_p \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < \min(R_a, R_b) \implies \sum_{n \geq 0} c_n z^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n \right).$$

4.2 Séries entières réelles

Théorème 4.13 (Interversion série entière / intégrale). Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$. Alors,

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad [a, b] \subset]-R, R[\implies \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b a_n x^n dx \right).$$

Définition 4.14 (Série primitive, série dérivée). On appelle :

1. série entière primitive de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$;
2. série entière dérivée de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$;
3. série entière dérivée p -ième, où $p \in \mathbb{N}^*$, de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ la série entière

$$\sum_{n \geq p} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p} = \sum_{n \geq 0} (n+p)\dots(n+1) a_{n+p} x^n.$$

Théorème 4.15 (Convergence des série primitives et dérivées). Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $S : x \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Alors :

1. La série entière primitive $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a le même rayon de convergence R et sa fonction somme sur l'intervalle $] -R, R[$ est la primitive de S qui s'annule en 0, c'est-à-dire que

$$\forall x \in] -R, R[, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x S(t) dt.$$

2. On a $S \in C^\infty(] -R, R[)$ et on obtient ses dérivées successives par dérivation terme à terme de la fonction S , c'est-à-dire que pour tout $x \in] -R, R[$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S^{(p)}(x)$ coïncide avec la série entière dérivée p -ième de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. De plus, toutes les séries entières dérivées ont le même rayon de convergence R .

Théorème 4.16 (Lien entre dérivées en zéro et coefficients). Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Corollaire 4.17 (Egalité de deux séries entières sur un ouvert). Soient $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a > 0$ et $R_b > 0$ et de fonctions sommes respectives S_a et S_b . On suppose qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 sur lequel $S_a = S_b$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

4.3 Fonctions développables en séries entières réelles

Définition 4.18 (Fonction développable en série entière réelle). Soit $\varepsilon > 0$, $B(0, \varepsilon)$ le disque ouvert centré en 0 et de rayon ε et $f : B(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière en 0 s'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ ainsi que $r \in]0, \min(\varepsilon, R)[$ tels que

$$\forall z \in B(0, r), \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

Dans ce cas, on appelle $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ le développement en série entière de f en 0.

Si $z_0 \in \mathbb{C}$, on dit que f est développable en série entière en z_0 si la fonction $w \mapsto f(z_0 + w)$ est développable en série entière en 0 avec pour développement $\sum_{n \geq 0} a_n w^n$. Dans ce cas, on appelle développement en série entière de f en z_0 la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$.

Si la série entière est réelle, alors les disques de type $B(0, \eta)$ sont remplacés par les intervalles ouverts $] -\eta, \eta[$.

Définition 4.19 (Série de Taylor). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C^\infty(I)$. On appelle série de Taylor de f en $x_0 \in I$, la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Théorème 4.20 (Egalité avec la série de Taylor). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est développable en série entière en $x_0 \in I$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $f \in C^\infty(]x_0 - \eta, x_0 + \eta[)$ et le développement en série entière de f en x_0 coïncide avec sa série de Taylor en x_0 sur $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \quad f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Proposition 4.21 (Propriétés). On a les propriétés suivantes :

1. Soit $\varepsilon > 0$ et $f, g : B(z_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions développables en séries entières en z_0 . Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, λf , $f + g$ et $f g$ sont développables en série entière en z_0 .
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière en $x_0 \in I$. Alors les dérivées successives de f ainsi que les primitives de f sont développables en série entière en x_0 , et leur développement en série entière s'obtient par dérivation (resp. intégration) terme à terme à partir de celui de f .
3. Soit f une fonction paire (resp. impaire) développable en série entière en 0. Alors tous les termes d'indices impaires (resp. paires) de son développement sont nuls.

4.4 Formulaire

• Exponentielle complexe : $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, de rayon de convergence $R = +\infty$.

• Toutes les séries entières qui suivent ont pour rayon de convergence $R = +\infty$.

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$3. \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$4. \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$5. \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

• Toutes les séries entières qui suivent ont pour rayon de convergence $R = 1$.

$$1. \forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$2. \forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$$

$$3. \forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1, \quad \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$4. \forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$5. \forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1, \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$6. \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

5 Topologie de $\mathbb{R}^n$ et continuité des fonctions de plusieurs variables

5.1 Normes

Définition 5.1 (Norme sur $\mathbb{R}^n$). Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. Positivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq 0$;
2. Séparation : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
3. Homogénéité : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
4. Inégalité triangulaire : Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On dit alors que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Définition 5.2 (Distance sur $\mathbb{R}^n$ issue d'une norme). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, alors la distance sur $\mathbb{R}^n$ associée à cette norme est l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Proposition 5.3 (Deuxième inégalité triangulaire). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Proposition 5.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

De plus, on a égalité si et seulement si $x = \lambda y$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que les vecteurs x et y sont liés.

Proposition 5.5 (Normes classiques). Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.6 (Normes équivalentes). Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$. On dit que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes s'il existe $m, M > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|.$$

Théorème 5.7 (Equivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$). Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Définition 5.8 (Boules pour une norme donnée). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, d sa distance associée, $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Alors on définit :

- la boule ouverte centrée en x et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$ par

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$$

- la boule fermée centrée en x et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$ par

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq r\}$$

- la sphère centrée en x et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$ par

$$\partial B(x, r) = S(x, r) := \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = r\}$$

Définition 5.9 (Ensemble borné). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, on dit que $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné (pour la norme $\|\cdot\|$) s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq M$. Autrement dit, A est borné s'il existe $M > 0$ tel que $A \subset B_{\|\cdot\|}(0, M)$.

Définition 5.10 (Convergence d'une suite pour une norme donnée). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On dit que la suite $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ tend vers $x \in \mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad \|x_k - x\| < \varepsilon.$$

On écrit aussi : $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$ pour la norme $\|\cdot\|$.

Proposition 5.11 (Convergence des coordonnées d'une suite). La suite $(x_k)_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)_k \subset \mathbb{R}^n$ converge vers $x = (x^1, \dots, x^n)$ pour $\|\cdot\|_2$ si et seulement si $(x_k^i)_k$ converge vers x^i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ pour $|\cdot|$.

5.2 Ouverts, fermés

Définition 5.12 (Ouverts et fermés de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$). On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$, alors :

- on dit que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si

$$\forall x \in \Omega, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \Omega.$$

- on dit que $F \subset \mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{R}^n \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.13 (Caractérisation séquentielle d'un fermé). Une partie F est fermé si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de F appartient à F .

Proposition 5.14 (Réunions et intersections d'ouverts et de fermés). On a :

1. Les ensembles $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\{x\}$ est un fermé.
3. La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.
4. L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.
5. L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.
6. La réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.

Proposition 5.15 (Boules et sphères). Quelque soit la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$, une boule ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$. De plus, toute sphère de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.16 (Intervalles de $\mathbb{R}$). Soient $a < b$ deux réels, alors :

1. $]a, b[,]-\infty, a[$ et $]b, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
2. $[a, b],]-\infty, a]$ et $[b, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Proposition 5.17 (Ensembles ouverts et fermés). Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.18 (Produits d'ouverts ou de fermés). Soient $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ munis de leurs normes euclidiennes $\|\cdot\|_2$, alors :

1. si $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^p$ sont deux ouverts, alors $\Omega_1 \times \Omega_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.
2. si $F_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $F_2 \subset \mathbb{R}^p$ sont deux fermés, alors $F_1 \times F_2$ est un fermé de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Définition 5.19 (Point intérieur à une partie de $\mathbb{R}^n$). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On dit que le point x est intérieur à A si $\exists r > 0, B(x, r) \subset A$.

L'intérieur de A , noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A .

Proposition 5.20 (Ouvert et intérieur). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\mathring{A} = A$. De plus, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A , c'est l'union de tous les ouverts contenus dans A .

Définition 5.21 (Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}^n$). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Un point x est adhérent à A s'il existe une suite $(x_k)_k \subset A$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$.

L'ensemble des points adhérents à A , aussi appelé adhérence de A , est noté $\overline{A}$.

Proposition 5.22 (Fermé et adhérence). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors A est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\overline{A} = A$. De plus, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A , c'est l'intersection de tous les fermés contenant A .

Définition 5.23 (Densité). Soient $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, alors on dit que A est dense dans B si $B = \overline{A}$.

Proposition 5.24 (Adhérence et intérieur de $B(x, r)$). Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, alors :

1. $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ (l'adhérence d'une boule est la boule fermée);
2. $\mathring{\overline{B}(x, r)} = B(x, r)$ (l'intérieur d'une boule est la boule ouverte).

Définition 5.25 (Bord/frontière d'un ensemble). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, alors on définit par $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ le bord (ou la frontière) de A .

En particulier, $\overline{A} = \mathring{A} \sqcup \partial A$ et le triplet $(\mathring{A}, \partial A, \mathbb{R}^n \setminus \overline{A})$ forme une partition de $\mathbb{R}^n$.

5.3 Compacité

Théorème 5.26 (Bolzano-Weierstrass). Toute suite de réels bornée admet une sous-suite convergente.

Définition 5.27 (Compact de $\mathbb{R}^n$). On dit que l'ensemble non-vide $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si toute suite d'éléments de K admet une sous-suite convergente dans K .

Théorème 5.28 (Heine-Borel). Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si K est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.29 (Intersection et union de compacts). Toute intersection quelconque (resp. union finie) de compacts de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.30 (Produit de compacts). Soit $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $K_2 \subset \mathbb{R}^p$ deux compacts. Alors $K_1 \times K_2$ est un compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

5.4 Continuité

Définition 5.31 (Limite d'une fonction en un point). Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et x_0 un point adhérent à E . On dit que f a pour limite $y_0 \in \mathbb{R}^p$ quand $x \rightarrow x_0$ dans E , et on note $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = y_0$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x) - y_0\|_2 < \varepsilon$$

Proposition 5.32 (Unicité et opérations sur les limites). Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et x_0 un point adhérent à E .

1. (Unicité) Si la limite $y_0 \in \mathbb{R}^p$ de f en x_0 existe, alors cette limite est unique.
2. (Somme) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y'_0$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = y_0 + y'_0$.
3. (Produit) Soit $p = 1$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y'_0$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = y_0 y'_0$.
4. (Quotient) Soit $p = 1$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y'_0 \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{y_0}{y'_0}$.
5. (Composée) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ où y_0 est un point adhérent à $\text{Im}(f)$, et $g : \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{R}^p$ est telle que $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z_0$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = z_0$.

Définition 5.33 (Fonction continue/uniformément continue). Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $x_0 \in E$.

- On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur E si f est continue en tout point $x_0 \in E$.

- On dit que f est uniformément continue sur E si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \|x - y\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_2 < \varepsilon.$$

Proposition 5.34 (Image réciproque d'un ouvert/fermé par une application continue). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application continue, alors si $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ est un ouvert (resp. F est un fermé), $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.35 (Uniforme continuité des normes). Toute norme sur $\mathbb{R}^n$ est uniformément continue.

Proposition 5.36 (Continuité des coordonnées). Soit $p > 1$ et $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$. Soit $x_0 \in E$, alors f est continue en x_0 si et seulement si $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, f_i est continue en x_0 .

Proposition 5.37 (Opérations sur les fonctions continues). Les sommes, produits, quotients (avec dénominateur non-nul) et composées de fonctions continues sont continues.

Proposition 5.38 (Caractérisation séquentielle des fonctions continues). Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $x_0 \in E$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_k)_k \subset E$ qui converge vers x_0 , on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = f(x_0)$.

Théorème 5.39 (Weierstrass, théorème des bornes atteintes). Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application continue et $K \subset E$ un compact non-vidé de $\mathbb{R}^n$. Alors $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$. Ainsi, toute fonction continue $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sur un ensemble compact K atteint ses bornes sur K .

Théorème 5.40 (Heine, continuité uniforme sur un compact). Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application continue et $K \subset E$ un compact non-vidé de $\mathbb{R}^n$. Alors f est uniformément continue sur K .

6 Compléments sur l'intégrale de Riemann

6.1 Intégration des fonctions en escaliers

Définition 6.1 (Subdivision et fonction en escaliers). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

1. Une subdivision σ de $[a, b]$ est la donnée d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et de $n + 1$ points $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ avec

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b.$$

2. Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ' est plus fine que σ si tous les éléments de σ appartiennent à σ' .
3. On dit qu'une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est en escaliers s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ (que l'on dit adaptée à φ) et des constantes $\{c_0, \dots, c_{n-1}\}$ telles que

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \quad \varphi(x) = c_i.$$

On notera $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escaliers définies sur $[a, b]$.

Proposition 6.2. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b])$.

1. Si σ est une subdivision adaptée à φ , alors toute subdivision σ' plus fine que σ est aussi adaptée à φ .
2. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{E}([a, b])$.
3. On a de plus $|\varphi| \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\varphi\psi \in \mathcal{E}([a, b])$.

Définition 6.3 (Intégrale d'une fonction en escaliers). Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à φ . On définit alors l'intégrale de φ sur $[a, b]$ par

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i.$$

De plus, on définit :

- $\int_b^a \varphi(x) dx = - \int_a^b \varphi(x) dx,$
- $\int_a^a \varphi(x) dx = 0.$

Proposition 6.4 (Indépendance de l'intégrale par rapport à la subdivision). Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$, alors pour toute subdivision adaptée σ , $\int_a^b \varphi(x) dx$ admet la même valeur.

Proposition 6.5 (Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escaliers). Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in I^2$, $a < b$, et $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(I)$.

1. **(Linéarité)** $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b (\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)) dx = \lambda \int_a^b \varphi(x) dx + \mu \int_a^b \psi(x) dx.$
2. **(Positivité)** Si $\varphi \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b \varphi(x) dx \geq 0$. En particulier : $\varphi \leq \psi \implies \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx.$
3. **(Relation de Chasles)** Pour tout $c \in I$, $\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^c \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx.$
4. **(Inégalité triangulaire)** On a $\left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)| dx.$

6.2 Intégration des fonctions réglées

Définition 6.6 (Fonction réglée). On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est réglée s'il existe une suite de fonctions en escaliers $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}([a, b])$ qui converge uniformément vers f .

Définition 6.7 (Fonction continue par morceaux). On dit que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, la restriction de f à l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ admet un prolongement continu à l'intervalle fermé $[x_i, x_{i+1}]$.

Théorème 6.8 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle compact). Toute fonction continue par morceaux sur un intervalle compact est réglée.

Lemme 6.9 (Construction d'une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction continue). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_n = (x_0, \dots, x_n)$ la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ définie par

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad x_k = a + \frac{k}{n}(b-a).$$

On définit de plus une fonction en escaliers φ_n sur $[a, b]$ en posant

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \forall x \in [x_k, x_{k+1}[, \quad \varphi_n(x) = f(x_k), \quad \text{et} \quad \varphi_n(b) = f(b).$$

Alors la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Théorème 6.10 (Construction de l'intégrale d'une fonction réglée). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réglée et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f . Alors :

1. La suite $\left(\int_a^b \varphi_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge;
2. Sa limite ne dépend que de a, b et f , et non du choix de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$;
3. On définit alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx ;$$

4. Enfin, on a $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Proposition 6.11 (Propriétés de l'intégrale des fonctions réglées). L'intégrale des fonctions réglées est linéaire, positive et satisfait la relation de Chasles (c'est-à-dire les propriétés de la Proposition 6.5).

Théorème 6.12 (Théorème de la moyenne). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c).$$

Théorème 6.13 (Théorème fondamental de l'Analyse et calcul de l'intégrale d'une fonction continue). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors :

1. La fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a ;
2. On a de plus $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

Proposition 6.14 (Sommes de Riemann). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right).$$