Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
9 octobre 2019

Analyse pour l'économie 1. Contrôle continu N. 1.

Sujet jaune

Exercice 1. Étudier l'existence et éventuellement calculer les limites

$$(a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \exp\Big(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\Big), \qquad (b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \exp\Big(\frac{xy}{x^2+y^2}\Big), \qquad (c)\ \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \exp\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big).$$

Solution.
(a)

$$0 \leq \Big|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\Big| \leq |y|. \text{ Donc } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 \text{ et } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \exp\Big(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\Big) = e^0 = 1\ .$$

(b) La limite n'existe pas. Observons en effet que les suites $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ et $(\frac{1}{n}, 0)$ convergent vers $(0,0)$ et que si on évalue la fonction $f(x,y) = \exp\big(\frac{xy}{x^2+y^2}\big)$ sur ces deux suites on trouve deux limites différentes :
$f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to e^1/2$ et $f(\frac{1}{n}, 0) \to e^0 = 1$.

(c)

$$\Big|\frac{x}{x^2+y^2}\Big| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ pour } \|(x,y)\| \to \infty. \text{ Donc } \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \exp\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) = e^0 = 1.$$

. . . .

Exercice 2. Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite *convexe* si tout ségment dont les extrémités sont dans A est contenu dans A. Autrement dit :

$$\forall\, a, a' \in A,\ \forall\, 0 \leq t \leq 1\ : (1-t)a + ta' \in A. \tag{C}$$

Établir si les ensembles suivants sont convexes (deviner vos réponses avec un dessin, ensuite les justifier en se servant de (C)).

1. $\mathbb{R} \times \{0\}$.
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x^2+y^2} \geq 1\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq y \leq 2\}$.

(1) $\mathbb{R} \times \{0\}$ est l'axe des abscisses. Il s'agit d'une droite, et donc clairement convexe.
(2) L'ensemble est le complémentaire du disque unité. Ce n'est clairement pas convexe : prendre les deux points $a = (-1,0)$ et $a' = (1,0)$ qui appartiennent tous les deux à l'ensemble, et $t = 1/2$. Le point $(1-t)a + ta' = (1/2)(-1,0) + (1/2)(1,0) = (0,0)$ n'appartient pas à l'ensemble.
(3) L'ensemble est un triangle (appelons-le T). C'est clairement convexe. Pour le voir, soit $a = (x,y)$ et $a' = (x',y')$ deux points de T. On a

$$1 \leq x \leq y \leq 2$$

et

$$1 \leq x' \leq y' \leq 2.$$

Soit $t \in [0,1]$. Multiplions les premières inégalités par $(1-t)$ et les secondes par t. Ensuite sommons terme-à-terme. On trouve

$$(1-t) + t \leq (1-t)x + tx' \leq (1-t)y + ty' \leq (1-t)2 + t2.$$

Cela nous donne $(1-t)a + ta' \in T$.

....

Exercice 3. Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x-y}, & x \neq y \\ x, & x = y. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est discontinue en $(1,1)$.
2. Démontrer que f est discontinue en $(0,0)$.

Solution.
Considérons $(1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) \to (1,1)$ et observons que $f(1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) \to \infty$. Donc f est discontinue au point $(1,1)$.
Considérons $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}) \to (0,0)$. On a

$$f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}) = \frac{\frac{1}{n^2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3})}{-\frac{1}{n^3}}) \to -\infty.$$

Donc f est discontinue en $(0,0)$.

....

Exercice 4.

1. Rappeler la définition de l'adhérence d'une partie d'un espace métrique.
   Dans la suite de l'exercice, on considère des parties A, B, V, W d'un espace métrique (X,d).
2. Démontrer que si $V \subset W$, alors $\overline{V} \subset \overline{W}$.
3. Én déduire que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. Démontrer que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Solution. L'adhérence d'un ensemble est le plus petit fermé contenant l'ensemble. On a toujours $W \subset \overline{W}$.
Si $V \subset W$, alors $V \subset \overline{W}$. Mais $\overline{W}$ étant un fermé contenant V, il contient aussi $\overline{V}$.
On a $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. L'ensemble de droite est un fermé qui contenant $A \cup B$. Cet ensemble doit donc contenir $\overline{A \cup B}$.
On a $A \subset A \cup B$ donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. De même, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ et on conclut en prenant la réunion.

....