Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
9 octobre 2019

NOM ..... **Prénom** ..... N. étudiant .....

Analyse pour l'économie 1. Contrôle continu N. 1.

Sujet jaune

La durée de totale de l'epreuve est d'une heure. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Étudier l'existence et éventuellement calculer les limites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \exp\Big(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\Big), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \exp\Big(\frac{xy}{x^2+y^2}\Big), \qquad \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \exp\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big).$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 2. Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite *convexe* si tout ségment dont les extrémités sont dans A est contenu dans A. Autrement dit :

$$\forall\, a, a' \in A,\ \forall\, 0 \leq t \leq 1\ : (1-t)a + ta' \in A. \qquad (C)$$

Établir si les ensembles suivants sont convexes (deviner vos réponses avec un dessin, ensuite les justifier en se servant de (C)).

1. $\mathbb{R} \times \{0\}$.
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq y \leq 2\}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x-y}, & x \neq y \\ x, & x = y. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est discontinue en $(1,1)$.
2. Démontrer que f est discontinue en $(0,0)$.

Exercice 4.

1. Rappeler la définition de l'adhérence d'une partie d'un espace métrique.
   Dans la suite de l'exercice, on considère des parties A, B, V, W d'un espace métrique (X, d).
2. Démontrer que si $V \subset W$, alors $\overline{V} \subset \overline{W}$.
3. Én déduire que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. Démontrer que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
9 octobre 2019

NOM ..... **Prénom** ..... N. étudiant .....

Analyse pour l'économie 1. Contrôle continu N. 1.

Sujet bleu

La durée de totale de l'epreuve est d'une heure. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Étudier l'existence et éventuellement calculer les limites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \exp\Big(\frac{x^3y}{(x^2+y^2)^2}\Big), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \exp\Big(\frac{y^3}{x^2+y^2}\Big), \qquad \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \exp\Big(\frac{y}{x^2+y^2}\Big).$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 2. Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite *convexe* si tout ségment dont les extrémités sont dans A est contenu dans A. Autrement dit :

$$\forall\, a, a' \in A,\ \forall\, 0 \leq t \leq 1\ : (1-t)a + ta' \in A. \qquad (C)$$

Établir si les ensembles suivants sont convexes (deviner vos réponses avec un dessin, ensuite les justifier en se servant de (C)).

1. $\{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}\}$.
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ y, & x+y = 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est discontinue en $(-1,1)$.
2. Démontrer que f est discontinue en $(0,0)$.

Exercice 4.

1. Rappeler la définition de l'interieur d'une partie d'un espace métrique.
   Dans la suite de l'exercice, on considère des parties A, B, V, W d'un espace métrique (X, d).
2. Démontrer que si $V \subset W$, alors $\overset{\circ}{V} \subset \overset{\circ}{W}$.
3. Én déduire que $(A \cap B)^\circ \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
4. Démontrer que $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset (A \cap B)^\circ$.