Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
21 octobre 2021

Analyse pour l'économie 1. Contrôle continu N. 1

Durée 1h. Documents non autorisés

Exercice 1. Considérons la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \text{et} \qquad f(0,0)=0.$$

1. Démontrer que f est continue en $(0,0)$ et conclure que f est continue dans $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$.
4. Montrer que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 2.

1. (Question de cours). Écrire l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$, au point (x_0, y_0, z_0), où $z_0 = f(x_0,y_0)$ et f est une fonction différentiable en (x_0,y_0).
2. On pose $f(x,y) = x^2+y^2+5$. Vérifier que le plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,2,10)$ passe par l'origine.

Exercice 3. Soit $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. On pose

$$G(x,y,z) = F\big(f(y,z), f(z,x), f(x,y)\big).$$

1. Exprimer la dérivée partielle $G_x(x,y,z)$ en fonction des dérivées partielles de F et de f.
2. Supposons que $f(0,0)=0$, $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\nabla F(0,0,0) = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$. Déduire de la formule trouvée à la prémière question que $G_x(0,0,0) = 13$.

Exercice 4. Soit $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction discontinue définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si si } x < 0. \end{cases}$$

1. Construire un ouvert U de $\mathbb{R}$ tel que $H^{-1}(U)$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.
2. Construire un fermé F de $\mathbb{R}$ tel que $H^{-1}(F)$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{exercice 1}}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) $|f(x,y)| \leq \dfrac{|x|^3}{x^2+y^2} + \dfrac{y^4}{x^2+y^2} \leq \underbrace{|x| + y^2}_{\to 0}$ (car $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ et $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$).

si $(x,y) \to (0,0)$

donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Mais $f(0,0) = 0$,

donc f est continue en $(0,0)$. De plus f est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

donc f est continue dans $\mathbb{R}^2$

2) $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{3x^2(x^2+y^2) - (x^3+y^4)2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x^4+3x^2y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x(x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

4) il suffit de montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 1$

en effet étudions la limite le long de l'axe $x=0$:

$\forall y \neq 0$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \dfrac{0}{y^4} = 0$ donc $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$

Mais alors on ne peut avoir $\lim\limits_{(x,y)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1$.

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est discontinue en $(0,0)$.

$\boxed{\text{exercice 2}}$ l'équation du plan tangent est : $\boxed{z = f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}$

En particulier, si $f(x,y) = x^2+y^2+5$ et $(x_0,y_0) = (1,2)$

on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 4$ et $f(x_0,y_0) = 10$

L'équation du plan tangent est donc : $z = 10 + 2(x-1) + 4(y-2)$

c'est à dire : $\boxed{z = 2x+4y}$. On voit immédiatement que $(0,0,0)$ appartient à ce plan

$\boxed{\text{exercice 3}}$ $\quad G(x,y,z) = F\big(f(y,z),\ f(z,x),\ f(x,y)\big)$

1) On note F_x, F_y et F_z les dérivées partielles de F et on note $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ les dérivées partielles de f par rapport à la première et seconde variable, respectivement.

On a:

$$G_x(x,y,z) = F_x\big(f(y,z), f(z,x), f(x,y)\big)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}[f(y,z)]}_{=0} + F_y\big(f(y,z), f(z,x), f(x,y)\big)\frac{\partial}{\partial x}[f(z,x)]$$
$$+ F_z\big(f(y,z), f(z,x), f(x,y)\big)\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)]$$

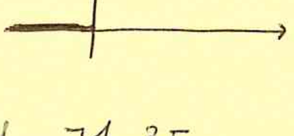
$$= F_y\big(f(y,z), f(z,x), f(x,y)\big)\,\partial_2 f(z,x) + F_z\big(f(y,z), f(z,x), f(x,y)\big)\,\partial_1 f(x,y)$$

2) En particulier, si $f(0,0)=0$, $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\nabla F(0,0,0) = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

On a :

$$G_x(0,0,0) = F_y(0,0,0)\,\partial_2 f(0,0) + F_z(0,0,0)\,\partial_1 f(0,0) = 4\cdot 2 + 5\cdot 1 = 13.$$

$\boxed{\text{exercice 4}}$



1) Soit $\mathcal{U} =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ $\qquad H^{-1}(\mathcal{U}) = \{x\in\mathbb{R} :\ H(x)\in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[\} =$

On voit que $\mathcal{U}$ est ouvert, mais $H^{-1}(\mathcal{U})$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ $\qquad = \{x\in\mathbb{R} :\ \frac{1}{2} < H(x) < \frac{3}{2}\} = [0,+\infty)$

2) Soit $F = \{0\}$ $\qquad H^{-1}(F) = \{x\in\mathbb{R} :\ H(x)\in\{0\}\} = \{x\in\mathbb{R} :\ H(x)=0\} =]-\infty, 0[$

On voit que F est fermé, mais $H^{-1}(F)$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.