Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
21 octobre 2021

Analyse pour l'économie 1. Contrôle continu N. 1

Durée 1h. Documents non autorisés

Exercice 1. Considérons la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \qquad \text{et} \qquad f(0,0)=0.$$

1. Démontrer que f est continue en $(0,0)$ et conclure que f est continue dans $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$.
4. Montrer que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 2.

1. (Question de cours). Écrire l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$, au point (x_0, y_0, z_0), où $z_0 = f(x_0,y_0)$ et f est une fonction différentiable en (x_0,y_0).
2. On pose $f(x,y) = x^2+y^2+5$. Vérifier que le plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,2,10)$ passe par l'origine.

Exercice 3. Soit $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. On pose

$$G(x,y,z) = F\big(f(y,z), f(z,x), f(x,y)\big).$$

1. Exprimer la dérivée partielle $G_x(x,y,z)$ en fonction des dérivées partielles de F et de f.
2. Supposons que $f(0,0)=0$, $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\nabla F(0,0,0) = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$. Déduire de la formule trouvée à la prémière question que $G_x(0,0,0) = 13$.

Exercice 4. Soit $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction discontinue définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si si } x < 0. \end{cases}$$

1. Construire un ouvert U de $\mathbb{R}$ tel que $H^{-1}(U)$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.
2. Construire un fermé F de $\mathbb{R}$ tel que $H^{-1}(F)$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.