① Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, qui est ouvert, g est continue comme quotient de deux fonctions polynomiales

En $(0,0)$ on commence par calculer $g(x,y) - g(0,0) = \dfrac{3x^2+xy^3+3y^2-3(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$= \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$. On utilise ensuite des coordonnées polaires: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r^2 = x^2+y^2$

donc $0 \leqslant |g(x,y) - g(0,0)| = \dfrac{r^4|\cos\theta||\sin\theta|^3}{r^2} \leqslant r^2$

Par les "gendarmes", $|g(x,y) - g(0,0)| \longrightarrow 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$

donc $g(x,y) \longrightarrow g(0,0)$. La fonction g est continue en $(0,0)$

② 1) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y)$ existe $\Leftrightarrow x^6+x^2+y^2+1 \neq 0$

Or pour tout (x,y) $x^6 \geqslant 0$, $x^2 \geqslant 0$, $y^2 \geqslant 0$ donc $x^6+x^2+y^2+1 \geqslant 1 > 0$

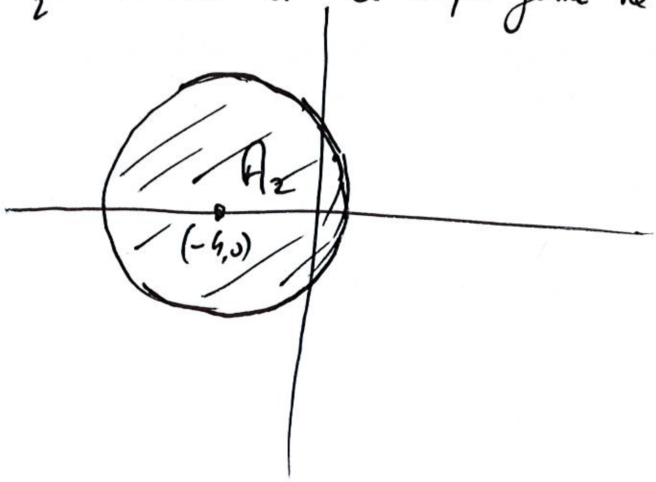
On conclut que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$. Sur $\mathbb{R}^2$, f est continue comme quotient de deux fonctions polynomiales.

2) a) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 2$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2x^6+7x^2+7y^2+40x-43 = 2x^6+2x^2+2y^2+2 \\
&\Leftrightarrow 5x^2+5y^2+40x-45 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+8x-9 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2+8x) + y^2 = 9 \\
&\Leftrightarrow [(x+4)^2-16] + y^2 = 9 \\
&\Leftrightarrow (x+4)^2 + y^2 = 25 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2+y^2} = 5
\end{aligned}$$

On reconnaît l'équation du cercle de centre $(-4,0)$ et de rayon 5

On pourrait refaire le même calcul avec des "$\leqslant$" et conclure que l'ensemble A_2 à dessiner est le disque fermé de centre $(-4,0)$ et de rayon 5



b) La courbe C_1 est incluse dans le disque A_2, donc bornée.

De plus $C_1 = f^{-1}(\{1\})$ où f est continue et $\{1\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, et donc C_1 est fermée dans $\mathbb{R}^2$.

On conclut à la compacité de C_1

3) On examine $f(t,t) = \dfrac{2t^6+14t^2+40t-43}{t^6+2t^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2t^6}{t^6} = 2$

et on conclut que $f(t,t) \longrightarrow 2$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

Par définition d'une limite, on peut donc prendre un $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t réel, si $t \geqslant M$ alors $|f(t,t) - 2| \leqslant 1$ et, en particulier, $f(t,t) \leqslant 3$. L'ensemble A_3 contient donc tous les (t,t) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels $t \geqslant M$: il n'est donc pas borné, donc pas compact.

③ ① Soit $x \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$N(\lambda x) = \mathrm{Max}\,(N_1(\lambda x), N_2(\lambda x)) = \mathrm{Max}\,(|\lambda| N_1(x), |\lambda| N_2(x)) = |\lambda|\, \mathrm{Max}\,(N_1(x), N_2(x))$$
$$= |\lambda|\, N(x)$$

② * $N(0) = \mathrm{Max}\,(N_1(0), N_2(0)) = \mathrm{Max}\,(0,0) = 0$

* Soit $x \in E$ avec $N(x) = 0$. Ainsi $\mathrm{Max}\,(N_1(x), N_2(x)) = 0$ où $0 \leqslant N_1(x)$ et $0 \leqslant N_2(x)$ donc $N_1(x) = N_2(x) = 0$. Comme N_1 est une norme, $x = 0$.

③ Soit $x, y \in E$

$$N(x+y) = \mathrm{Max}\,(N_1(x+y), N_2(x+y)) \leqslant \mathrm{Max}\,(N_1(x) + N_1(y), N_2(x) + N_2(y))$$
$$\leqslant \mathrm{Max}\,(N(x) + N(y), N(x) + N(y))$$
$$= N(x) + N(y)$$

Au vu de ①, ② et ③, on conclut que N est une norme sur E.