Université Claude Bernard Lyon 1. Licence STS. UE Analyse pour l'économie 1
Contrôle continu 1. Mercredi 6 octobre 2021
Durée : 45 minutes. Pas de documents, calculettes, téléphones, etc...

Exercice 1
On définit une fonction g sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$g(x,y) = \frac{3x^2 + xy^3 + 3y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad g(0,0) = 3.$$

Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice 2
Pour les (x,y) de $\mathbf{R}^2$ donnant un sens à cette formule, on pose :

$$f(x,y) = \frac{2x^6 + 7x^2 + 7y^2 + 40x - 43}{x^6 + x^2 + y^2 + 1}.$$

1) Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f. La fonction f est-elle continue sur cet ensemble de définition ?

2) a) Déterminer la courbe de niveau C_2 de la fonction f pour le niveau 2, puis représenter graphiquement l'ensemble $A_2 = \{(x,y) \in \mathcal{D}_f \mid f(x,y) \leq 2\}$.

b) Sans chercher à la tracer, montrer que la courbe de niveau C_1 de la fonction f pour le niveau 1 est un compact.

3) Montrer que $f(t,t)$ tend vers 2 quand t tend vers $+\infty$ et en déduire que l'ensemble $A_3 = \{(x,y) \in \mathcal{D}_f \mid f(x,y) \leq 3\}$ n'est pas un compact.

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel réel, soit N_1 et $N_2 : E \to \mathbf{R}^+$ deux normes sur E.
On définit une application $N : E \to \mathbf{R}^+$ par : $N(x) = \mathrm{Max}(N_1(x), N_2(x))$.
Montrer que N est une norme sur E.