Université Lyon 1. Licence STS : parcours Mathématiques et économie

Analyse pour l'économie 1

Contrôle continu nº 2. Mercredi 30 novembre 2016

Durée : 1 heure. Seules les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1 L'application suivante définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & |x|+|y| \end{array}$$

Exercice 2 On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & \\ (x,y) & \mapsto & \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ & & 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 en dehors du point $(0,0)$. Calculer leurs limites en $(0,0)$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Énoncer le théorème de Schwarz.
4. À l'aide des expressions de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$, calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.
5. Démontrer, sans autres calculs, que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.