(1) 1) La continuité est évidente sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

En $(0,0)$ le mieux est de passer en polaires :

$$0 \leq |g(x,y)| = \frac{r^6 |\cos^3\theta| |\sin^3\theta|}{r^4} = r^2 |\cos^3\theta \sin^3\theta| \leq r^2$$

donc $g(x,y) \to 0 = g(0,0)$ quand $(x,y) \to (0,0)$. Ceci prouve la continuité

2) Une façon de faire est d'observer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$0 < x^2+y^2 \leq x^2+5y^2$ donc $0 < (x^2+y^2)^2 \leq (x^2+5y^2)^2$ puis $0 < \dfrac{1}{(x^2+5y^2)^2} \leq \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$

et enfin $0 \leq |h(x,y)| \leq |g(x,y)|$. Par les "gendarmes", $h(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$

(2) 1) f est définie aux (x,y) où $x^2+y^2-4y+4 \neq 0 \iff x^2+(y-2)^2 \neq 0 \iff (x,y) \neq (0,2)$

donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,2)\}$

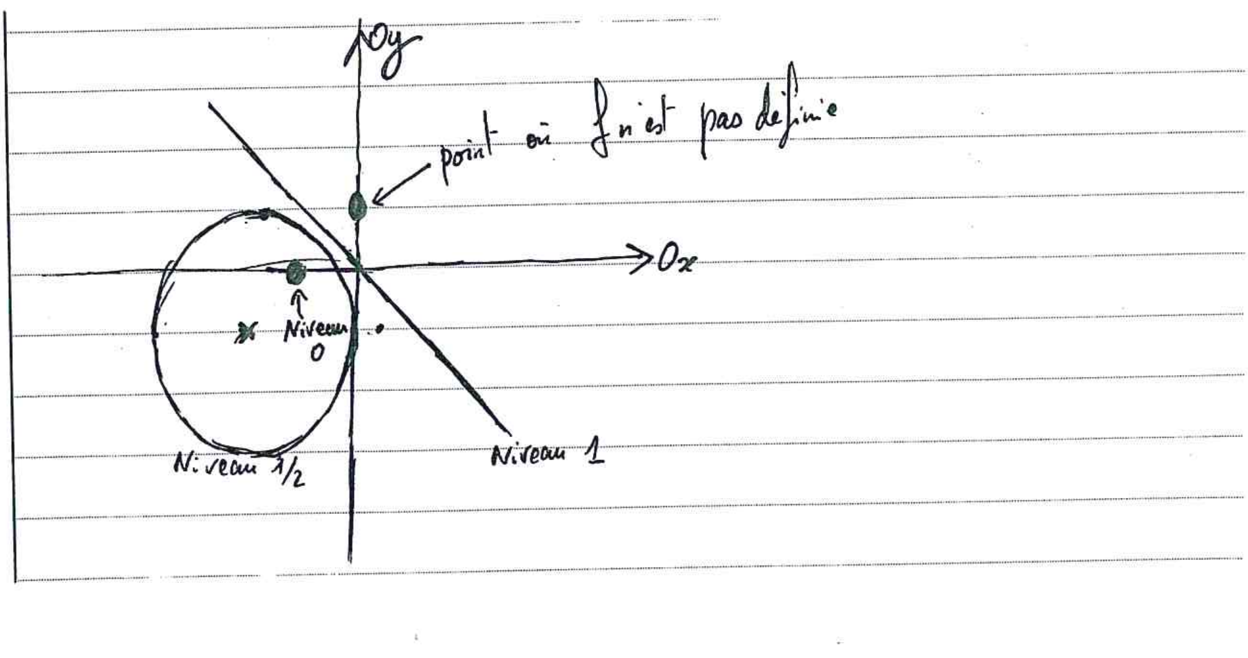
2) a) $f(x,y) = 1 \iff x^2+4x+y^2+4 = x^2+y^2-4y+4 \iff 4x = -4y \iff x = -y$, qui est l'équation d'une droite

b) $f(x,y) = 0 \iff x^2+4x+y^2+4 = 0 \iff (x+2)^2+y^2 = 0 \iff (x,y) = (-2,0)$. La "courbe" de niveau se réduit à un seul point

c) $f(x,y) = \frac{1}{2} \iff 2(x^2+4x+y^2+4) = x^2+y^2-4y+4 \iff 2x^2+8x+2y^2+8 = x^2+y^2-4y+4$

$\iff x^2+8x+y^2+4y+4 = 0 \iff (x+4)^2+(y+2)^2+4-16-4 = 0$

$\iff (x+4)^2+(y+2)^2 = 16$, qui est l'équation du cercle de centre $(-4,-2)$ et de rayon $\sqrt{16} = 4$.



3) Quand $(x,y) \to (0,2)$ $|x^2+4x+y^2+4| \to 8$ tandis que $|x^2+y^2-4y+4| \to 0^+$

le quotient $|f(x,y)|$ tend donc vers $+\infty$

4) a) Il contient la droite de niveau 1 représentée sur le dessin donc n'est clairement pas borné, donc pas compact. [Si on est méticuleux, on peut écrire que $(n,-n)$ est dans l'ensemble et $\|(n,-n)\| = n\sqrt{2} \to +\infty$ qd $n \to +\infty$, mais ça ne me paraît pas indispensable]

b) On refait (mentalement) le calcul du 2)c) avec une inégalité large au lieu d'une égalité et on constate que

$$f(x,y) \leq \frac{1}{2} \iff (x+4)^2 + (y+2)^2 \leq 16 \quad \text{équation d'un disque fermé.}$$

Tous les points de ce disque sont à distance inférieure à 4 de son centre $(-4,-2)$ (donc, si on est méticuleux, à distance inférieure à $4+\sqrt{20}$ de $(0,0)$, voire un peu moins) : ce disque est donc borné, ce qui d'ailleurs "se voit sur le dessin".

Pour la fermeture c'est l'image réciproque du fermé $]-\infty,4]$ par $g : (x,y) \mapsto (x+4)^2+(y+2)^2$ clairement continue [Si on dit que c'est $f^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}])$ on prend un petit risque, car f n'est pas définie sur $\mathbb{R}^2$ donc il pourrait y avoir un problème lié au "trou" dans $\mathcal{D}_f$ – il y en a un par exemple avec $f^{-1}([2,+\infty[)$. Mais le correcteur a veillé à faire semblant d'oublier cette subtilité en notant les copies].

3 * Si $x=0$, $N(x) = N_1(x) + N_2(x) = 0+0=0$

Réciproquement si $N(x)=0$, comme $N_1 \geq 0$ et $N_2 \geq 0$, c'est que $N_1(x) = N_2(x) = 0$ donc $x=0$

* $N(\lambda x) = N_1(\lambda x) + N_2(\lambda x) = |\lambda|\, N_1(x) + |\lambda|\, N_2(x) = |\lambda| \cdot N(x)$

* $N(x+y) = N_1(x+y) + N_2(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y) + N_2(x) + N_2(y)$
$= N_1(x) + N_2(x) + N_1(y) + N_2(y) = N(x) + N(y)$