Université Claude Bernard Lyon 1. Licence STS. UE Analyse pour l'économie 1
Contrôle continu 2. Mercredi 14 novembre 2018
Durée : 1 heure. Pas de documents, calculettes, téléphones, etc...

Exercice 1
On définit une fonction g sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$g(x,y) = \frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad g(0,0) = 0.$$

1) Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbf{R}^2$.
2) Dans cette question, on définit une fonction h sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$h(x,y) = \frac{x^3y^3}{(x^2+5y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0).$$

Étudier la limite éventuelle de $h(x,y)$ quand $(x,y) \to (0,0)$. (On pourra utiliser la question précédente).

Exercice 2
Pour les (x,y) de $\mathbf{R}^2$ donnant un sens à cette formule, on pose :

$$f(x,y) = \frac{x^2+4x+y^2+4}{x^2+y^2-4y+4}.$$

1) Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2) Sur un même dessin, représenter :
   a) la courbe de niveau de la fonction f pour le niveau 1 ;
   b) la "courbe" de niveau de la fonction f pour le niveau 0 ;
   c) la courbe de niveau de la fonction f pour le niveau $\frac{1}{2}$.
(Il est demandé de fournir sur la copie les calculs à l'appui des dessins effectués).
3) Montrer que $|f(x,y)| \to +\infty$ quand $(x,y) \to (0,2)$.
4) Dans cette question, lorsqu'il y aura à montrer qu'un ensemble est fermé, une phrase succincte suffira à la satisfaction du correcteur, qui n'attend pas tous les détails.
   a) L'ensemble $\{(x,y) \in \mathcal{D}_f \mid f(x,y) \leq 1\}$ est-il compact ?
   b) L'ensemble $\{(x,y) \in \mathcal{D}_f \mid f(x,y) \leq \frac{1}{2}\}$ est-il compact ?

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel réel, soit N_1 et $N_2 : E \to \mathbf{R}^+$ deux normes sur E.
On définit une application $N : E \to \mathbf{R}^+$ par : $N(x) = N_1(x) + N_2(x)$. (Autrement dit : $N = N_1 + N_2$).
Montrer que N est une norme sur E.