Université Claude Bernard Lyon 1. Licence STS. UE Analyse pour l'économie 1
Contrôle continu 2. Mercredi 13 novembre 2019
Durée : 1 heure. Pas de documents, calculettes, téléphones, etc...
Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille recto-verso)

Exercice 1
Dans cet exercice, on considère la fonction f de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3.$$

1) Calculer les dérivées partielles premières de f, puis déterminer les points stationnaires (ou points critiques) de f.

2) Pour chacun des points trouvés à la question précédente, déterminer si f admet ou non un extremum local en ce point. Lorsqu'il y a un extremum local, préciser s'il s'agit d'un maximum local ou d'un minimum local.

3) Montrer que f n'admet aucun extremum global.

Exercice 2
On considère la fonction Φ définie de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^2$ par :

$$\Phi(u,v) = (uv, u^2 + v^2).$$

Soit f une fonction différentiable de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$. Pour tout (u,v) de $\mathbf{R}^2$ on pose :

$$g(u,v) = f(uv, u^2 + v^2).$$

On recommande (sans l'imposer) de noter $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ la dérivée partielle première de f, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ la dérivée partielle seconde de f, $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ la dérivée partielle première de g, $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ la dérivée partielle seconde de g,

1) Soit (u,v) un point de $\mathbf{R}^2$. Écrire la matrice jacobienne $J_\Phi(u,v)$.

2) Soit (x,y) un point de $\mathbf{R}^2$. Écrire la matrice jacobienne $J_f(x,y)$.

3) En utilisant (selon ses goûts) soit les deux questions précédentes, soit la règle de la chaîne, donner une expression de $\dfrac{\partial g}{\partial u}(3,4)$ comme fonction très simple d'une valeur de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et d'une valeur de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(TSVP)

Exercice 3
Montrer la convergence de l'intégrale suivante, en la calculant :

$$I = \int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}\, dx.$$

Exercice 4
1) Montrer la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2/3}(3 + t + \ln t)}\, dt.$$

2) Déterminer la nature de

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 + 2\cos t}{t^{2/3}(3 + t + \ln t)}\, dt.$$