CC 2 Analyse pour l'économie 1, Corrigé

Theresia Eisenkölbl, Université Lyon 1
3 décembre 2020, 60 minutes

Question 1.

a. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Rappeler la définition de l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Comme la fonction f est continue sur chaque intervalle compact $[a, c]$ avec $a < c < b$, les intégrales

$$\int_a^c f(x)dx$$

sont bien définies. Si la limite

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

existe et vaut ℓ, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(x)dx$$

existe et vaut ℓ.

---

b. Donner l'énoncé du critère d'Alembert pour la convergence d'une série numérique.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série numérique. Si la limite

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

existe et vaut ℓ, on sait que la série

- converge absolument si $\ell < 1$
- diverge si $\ell > 1$.

Question 2. Déterminer si les séries numériques suivantes convergent et justifier votre réponse.

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

On applique le critère de d'Alembert (parce qu'on voit $n!$ qui fonctionne bien avec ce critère) et on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}n!}{(n+1)!3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

Comme la limite existe et est < 1, on conclut que la série converge absolument par le critère de d'Alembert.

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$

On constate que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ parce que $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \infty$, donc la série diverge.

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n+1}$

On simplifie d'abord le calcul par l'équivalence $\dfrac{n+1}{2^n+1} \overset{\infty}{\approx} \dfrac{n}{2^n}$. On applique le critère de Cauchy à $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ et on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

On conclut que la série converge par le critère de Cauchy et par équivalence.

d. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

La fonction $f : [2, \infty[$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^3}$ est une fonction positive, décroissante et continue. On peut donc appliquer le critère de comparaison série/intégrale et il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx.$$

On fait un changement de variable par $y = \ln x$ (donc $dy = \frac{1}{x}dx$) et on obtient l'intégrale

$$\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{y^3} dy = \left[\frac{y^{-2}}{-2}\right]_{y=\ln 2}^{y=\infty} = \lim_{y\to\infty} \left(\frac{-1}{2y^2}\right) + \frac{1}{2(\ln 2)^2} = \frac{1}{2(\ln 2)^2}.$$

On conclut que l'intégrale converge et donc la série aussi.

Question 3. Décider si les intégrales généralisées suivantes convergent et justifier votre réponse.

a. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$

Le dénominateur est zéro pour $x = 0$, il faut donc étudier la convergence de l'intégrale à 0 et à ∞ en regardant les deux parties $\int_0^1$ et $\int_1^\infty$. On commence avec un équivalent plus simple à 0 :

$$\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \overset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ qui converge comme intégrale de Riemann sur $]0,1]$ avec coefficient $\alpha = 1/2 < 1$.

On regarde maintenant un équivalent plus simple à ∞ :

$$\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \overset{\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ qui converge comme intégrale de Riemann sur $[1,\infty[$ avec coefficient $\alpha = 2 > 1$.

Comme les deux parties de l'intégrale convergent, l'intégrale sur $]0,\infty[$ converge aussi.

Remarque : Une approche alternative est le changement de variable $y = \sqrt{x}$ qui permet aussi d'évaluer l'intégrale par decomposition en éléments simples.

---

b. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(e^x-1)}dx$

La fonction est continue sur $[1,\infty[$, il suffit donc d'étudier la convergence à l'infini. (On ne peut pas utiliser le developpement limité comme équivalent parce qu'on est loin de 0!) On trouve l'équivalent plus simple :

$$\frac{1}{x(e^x-1)} \overset{\infty}{\sim} \frac{1}{xe^x}.$$

On trouve un majorant encore plus simple $\frac{1}{e^x}$ parce que $x \geq 1$. C'est intégrale est facile à évaluer par

$$\int_1^\infty \frac{1}{e^x}dx = \left[-e^{-x}\right]_{x=1}^{x=\infty} = -0 + e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Comme c'est intégrale converge, l'intégrale majorée aussi et donc l'intégrale donnée dans l'énoncé d'une fonction équivalente.

Remarque : La fonction donnée est bien majorée par $\frac{1}{x^2}$, mais il faudrait le démontrer.

Question 4.

a. Soient $x, y > 0$ fixé. Prouver la convergence de l'intégrale généralisée

$$\mathrm{B}(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Il faut étudier la convergence à 0 et à 1. On commence avec un équivalent à 0 par

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \overset{0}{\sim} t^{x-1}.$$

Si on étudie la convergence de l'intégrale $\int_0^{1/2} t^{x-1}dt$, on constate qu'il s'agit d'une intégrale de Riemann avec l'exposant $1-x < 1$ qui converge.

De manière analogue, on trouve l'équivalent $(1-t)^{y-1}$ proche de 1 et on constate que cela converge parce que la primitive $-(1-t)^y/y$ possède une limite finie à $t \to 1^-$.

---

b. En utilisant intégration par parties, montrer que

$$x\,\mathrm{B}(x, y+1) = y\,\mathrm{B}(x+1, y)$$

pour tout $x, y > 0$.

En utilisant IPP avec la primitive de facteur xt^{x-1} et la dérivée de facteur $(1-t)^y$, on obtient

$$\begin{aligned} xB(x, y+1) &= \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y dt \\ &= [t^x(1-t)^y]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 t^x(-y(1-t)^{y-1})dt \\ &= 0 - 0 + y\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt \\ &= yB(x+1, y). \end{aligned}$$

(On a besoin des exposants > 0 pour conclure que les puissances de t et de $(1-t)$ tendent vers 0!)

---

c. Calculer $\mathrm{B}(n,2)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On calcule

$$\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{2-1}dt = \int_0^1 (t^{n-1} - t^n)dt = \left[\frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$
