CC 2 Analyse pour l'économie 1

Theresia Eisenkölbl, Université Lyon 1
3 décembre 2020, 60 minutes

Question 1.

a. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Rappeler la définition de l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(x)dx.$$

b. Donner l'énoncé du critère d'Alembert pour la convergence d'une série numérique.

Question 2. Déterminer si les séries numériques suivantes convergent et justifier votre réponse.

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n+1}$

d. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

Question 3. Décider si les intégrales généralisées suivantes convergent et justifier votre réponse.

a. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\, dx$

b. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(e^x-1)} dx$

Question 4.

a. Soient $x, y > 0$ fixé. Prouver la convergence de l'intégrale généralisée

$$\mathrm{B}(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

b. En utilisant intégration par parties, montrer que

$$x\,\mathrm{B}(x, y+1) = y\,\mathrm{B}(x+1, y)$$

pour tout $x, y > 0$.

c. Calculer $\mathrm{B}(n, 2)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.