Exercice 1

Méthode 1 On pose $(x,y)=\left(\frac{\pi}{4}+h, \frac{\pi}{4}+k\right)$ de sorte que $(h,k)\to(0,0)$ quand $(x,y)\to\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

Alors $e^x \sin(x+y) = e^{\frac{\pi}{4}+h} \sin\left(\frac{\pi}{2}+h+k\right)$

$$= e^{\frac{\pi}{4}} e^{h} \cos(h+k) = e^{\frac{\pi}{4}} \left(1+h+\frac{h^2}{2}+o(h)\right)\left(1-\frac{(h+k)^2}{2}+o\left((h+k)^2\right)\right)$$

$$= e^{\frac{\pi}{4}}\left[1+h-hk-\frac{k^2}{2}\right]+o\left(\|(h,k)\|^2\right)$$

Méthode 2 on calcule sans finesse les dérivées partielles de la fonction, qu'on note f, puis leurs valeurs en $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ qu'on note P

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x\left[\cos(x+y)+\sin(x+y)\right] \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^x\cos(x+y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = e^x\left[\cos(x+y)-\sin(x+y)\right] \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = e^{\frac{\pi}{4}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(P)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P) = -e^{\frac{\pi}{4}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) = -e^{\frac{\pi}{4}}$$

et on applique sans réfléchir la formule de Taylor :

$$f(x,y) = e^{\pi/4}\left[1+h-\frac{2hk}{2}-\frac{k^2}{2}\right]+o\left(\|(h,k)\|^2\right)$$

Exercice 2

1) Si f était une solution $\mathcal{C}^1$, elle serait $\mathcal{C}^2$ (puisque $(x,y)\mapsto xy$ et $(x,y)\mapsto x^2$ sont polynomiales, donc $\mathcal{C}^1$). On aurait donc $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ partout, c'est-à-dire $x=2x$, qui est pourtant faux par exemple au point $(1,0)$

f n'existe donc pas.

2) Remarquons d'abord que $g_0(x,y) = e^x \cos y + \sin x$ est solution

Pour g de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, notons $h = g - g_0$

Alors g est solution $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g_0}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g_0}{\partial y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{cases}$ $(*)$

Les constantes vérifient $(*)$. Réciproquement si h vérifie $(*)$ en particulier $\frac{\partial}{\partial x} h(x,0) = 0$ pour tout x, donc h est constante sur l'axe des abscisses.

Puis pour tout a fixé et tout y, $\frac{\partial}{\partial y} h(a,y) = 0$ donc h est constante sur la droite d'équation $(x=a)$. La fonction h est donc constante

Les solutions du système initial sont donc les $g_0 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

1) C'est

$$A = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

2) Par la règle de composition des fonctions de plusieurs variables

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z}\right) A$$

(où $\frac{\partial g}{\partial r}$ abrège $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,\varphi)$ et ainsi de suite)

En isolant la deuxième composante, on lit :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial y} - r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial z}$$

Exercice 4

Les deux fonctions à étudier sont à valeurs positives sur leur intervalle de définition. Le seul point délicat est $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$, qui l'est parce que $0 < \frac{1}{t^2} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$ quand $1 \leq t$.
Il n'y a dans les deux cas de difficulté qu'en $+\infty$.

1) Quand $t \longrightarrow +\infty$
$t^{1/2} + t^{1/3} \sim t^{1/2}$ $\quad$ Arctan $t \to \frac{\pi}{2}$ donc Arctan $t \sim \frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{t^2} \to 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim \frac{1}{t^2}$ $\quad$ $t^3 + 3 \sim t^3$

La fonction positive intégrée équivaut donc à $\dfrac{\frac{\pi}{2}\, t^{1/2}}{\frac{1}{t^2}\, t^3}$

$= \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ qui est positive à intégrale divergente. C'est donc aussi le cas de f.

2) Notons ici $g(t) = e^{-(\ln t)^2}$

Alors $\dfrac{g(t)}{\frac{1}{t^2}} = t^2 g(t) = e^{2\ln t} e^{-(\ln t)^2} = e^{(2-\ln t)\ln t} \longrightarrow 0$

quand $t \to +\infty$

Autrement dit $g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ où $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est une fonction positive à intégrale convergente. L'intégrale de g converge donc aussi.