Université Claude Bernard Lyon 1. Licence STS. UE Analyse pour l'économie 1
Contrôle continu 2. Mercredi 10 novembre 2021
Durée : 1 heure. Pas de documents, calculettes, téléphones, etc...

Exercice 1
Écrire un développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ de la fonction :

$$e^x \sin(x+y)$$

Exercice 2
1) Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ qui vérifient en tout point noté (x, y) le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & x^2 \end{cases}$$

2) Déterminer toutes les fonctions g de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ qui vérifient en tout point noté (x, y) le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} & = & \cos x + e^x \cos y \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & = & -e^x \sin y \end{cases}$$

Exercice 3
Sur $]0, +\infty[\times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, on pose :

$$T(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

1) Pour $(r, \theta, \varphi) \in]0, +\infty[\times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, écrire la matrice jacobienne $JT(r, \theta, \varphi)$.
2) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}$. On note $g = f \circ T$. Soit (r, θ, φ) un élément de $]0, +\infty[\times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
Comme il est d'usage, on s'autorisera à abréger $\dfrac{\partial f}{\partial x}[T(r, \theta, \varphi)]$ en $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, idem pour les deux autres variables y et z.
Écrire le réel $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi)$ en fonction de r, θ, φ, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Exercice 4
1) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(t^{1/2} + t^{1/3}) \operatorname{Arctan} t}{\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)(t^3+3)}\, dt$ est-elle convergente ou divergente ?

2) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-(\ln t)^2}\, dt$ est-elle convergente ou divergente ?