Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
12 décembre 2018

Analyse pour l'économie 1. Contrôle continu N.3.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, telle que $f' > 0$, $f(0) = 3$ et $f'(0) = 4$. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x, y) = f(xy + x)$.

1. Exprimer les dérivées partielles de F en fonction de f'. Montrer que F possède un et un seul point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ que l'on déterminera.
2. Écrire la matrice hessienne de F en (x_0, y_0). Quelle est la nature de ce point critique ?
3. Écrire la formule de Taylor de F au point (x_0, y_0), à l'ordre 2.

Exercice 2. Soit $x \geq 0$ et

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2x^2 + n}.$$

1. Démontrer que la série n'est pas normalement convergente sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Démontrer que la série est normalement convergente sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
3. La série est-elle uniformément convergente sur $[0, +\infty[$?

Exercice 3.

1. Question de cours : donner des hypothèses sur la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, assurant la validité de l'égalité de dérivation sous la série :

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big)'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x), \qquad (*)$$

   où $x \in \mathbb{R}$.

2. (a) Rappeler la formule donnant la somme d'une série géométrique et calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^3 e^{-nx^2}$.

   (b) Démontrer que S est dérivable en 0 et déterminer $S'(0)$ en calculant la limite $\lim_{x\to 0} \frac{S(x)-S(0)}{x}$.

   (c) En déduire que, si l'on pose $f_n(x) = x^3 e^{-nx^2}$, alors l'égalité $(*)$ est *fausse* pour $x = 0$.